PSI* 2024-2025, Mathématiques DS n°6 : Correction

EXERCICE : issu de e3A PC , 2022

1.a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(t) \geq 0$ alors $|u_n| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)dt$

Donc $|u_{n+1}| - |u_n| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+1}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{cos^n(t)}_{\geq 0} \underbrace{(cos(t)-1)}_{\leq 0} dt \leq 0$

Donc $|u_{n+1}| - |u_n| \leq 0$ et donc $\boxed{(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

1.b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : &]0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & cos^n(t) \end{array}$

Alors, comme $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq cos(t) < 1$ on a $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

La suite de fonction (f_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $|f_n(t)| \leq 1$ et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} 0dt = 0$$

Donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0}$

1.c) $\begin{cases} \text{la série } \sum u_n \text{ est alternée} \\ |u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante (cf a)} \\ \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \text{ (n)} \end{cases}$ donc par le théorème spécial : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

2.a) D'après la formule du cours : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \ , \ cos^2(\frac{t}{2}) = \frac{1+cos(t)}{2}}$

2.b) I est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, donc, avec le a) :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+cos(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2cos^2(t/2)}dt = [tan(t/2)]_0^{\frac{\pi}{2}} = tan(\pi/4) - tan(0) = 1$$

On a donc : $\boxed{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+cos(t)}dt = 1}$

2.c.i) $|u_{n+2}|$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+2}(t)dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t)cos^{n+1}(t)dt$ on fait une intégration par partie avec des fonctions dérivables

$= [-sin(t)cos^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)(n+1)sin(t)cos^n(t)dt$

$= 0 - 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-cos^2(t))cos^n(t)dt = (n+1)[|u_n| - |u_{n+2}|]$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ (n+2)\,|u_{n+2}| = (n+1)\,|u_n|}$

2.c.ii) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $|u_n| \geq \frac{1}{n+1}$
Initialisation :
$|u_0| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{2} \geq 1 = \frac{1}{0+1}$
$|u_1| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t)dt = [sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \geq \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$
La propriété est donc démontrer au deux premiers rang
Hérédité :
Supposons la propriété vraie au jusqu'au rang $n+1$ et montrons la au rang $n+2$
Par le 2.c.i) : $|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2} |u_n|$
Mais $|u_n| \geq \frac{1}{n+1}$ donc $|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2} |u_n| \geq \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+1+1}$
On a alors la relation au rang $n+2$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |u_n| \geq \frac{1}{n+1}}$

2.c.iii) Avec le ii) on a : $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)| \, dt \geq \frac{\pi}{2} \frac{1}{n+1}$

Comme $\sum \frac{1}{n+1}$ est une série de Riemann divergente alors, par comparaison $\sum \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)| \, dt$ est divergente et on a donc une hypothèses du théorème d'intégration terme à terme qui n'est pas vérifiée et on ne peut donc pas l'appliquer.

2.d) Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ on a $cos(t) \in [0, 1[$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k(t)$ est une série géométrique de raison $-cos(t) \in]-1, 0]$ donc
$V_n(t) = \frac{1-(-1)^{n+1} cos^{n+1}(t)}{1+cos(t)}$
De plus, comme $cos^n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $V_n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+cos(t)}$

On a aussi : $|V_n(t)| \leq \frac{2}{1+cos(t)} \leq 2$

On a donc : $\begin{cases} \text{la suite de fonction } (V_n) \text{ converge simplement sur }]0, \frac{\pi}{2}] \text{ vers } t \mapsto \frac{1}{1+cos(t)} \\ t \mapsto \frac{1}{1+cos(t)} \text{ est continue par morceaux sur }]0, \frac{\pi}{2}] \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}] \ , \ |V_n(t)| \leq 2 \text{ avec } t \mapsto 2 \text{ intégrable sur }]0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient (en utilisant le 2.b) :
$\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} V_n(t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \lim\limits_{n \to +\infty} V_n(t)dt \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+cos(t)} dt \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$

Conclusion : $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 1}$

Problème 1 : issu de ccINP PC , 2022

Q1) On sait d'après le cours que : $\boxed{\sum x^k \text{ a pour rayon de convergence 1 et que } \forall x \in]-1,1[\ ,\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}}$

Q2) On sait toujours d'après le cours, qu'une fonction définie par une série entière est C^∞ et que l'on peut la dériver terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence.
On déduit donc du a) : $\frac{d}{dx}\big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k\big) = \frac{d}{dx}\big(\frac{1}{1-x}\big)$ et donc : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$
En multipliant par x on a donc : $\boxed{\forall x \in]-1,1[\ ,\ \sum kx^k \text{ est convergente et } \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}}$

Q3) La première série est constituée de k Pile(s) et se termine par un Face ou est constituée de k Faces(s) et se termine par un Pile. On a donc : $\boxed{(L_1 = k) = \Big(\big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} P_i\big) \cap F_k\Big) \cup \Big(\big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_i\big) \cap P_k\Big)}$

Q4) Comme $\Big(\big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} P_i\big) \cap F_k\Big)$ et $\Big(\big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_i\big) \cap P_k\Big)$ sont incompatibles (on ne peut pas avoir une série de Pile ET une série de face en même temps) on a : $P(L_1 = k) = P\Big(\big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} P_i\big) \cap F_k\Big) + P\Big(\big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} F_i\big) \cap P_k\Big)$
On utilise maintenant l'indépendance des lancers et on obtient :
$P(L_1 = k) = \big(\prod\limits_{i=1}^{k} P(P_i)\big)P(F_k) + \big(\prod\limits_{i=1}^{k} P(F_i)\big)P(P_k)$
Comme on a pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P(P_j) = P(F_j) = \frac{1}{2}$ alors : $P(L_1 = k) = (\frac{1}{2})^k\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^k\frac{1}{2} = \frac{1}{2^k} = 2^{-k}$

Bilan : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ P(L_1 = k) = 2^{-k}}$

Q5) $((L_1 = k))_{k\in\mathbb{N}}$ est le système complet d'événement associé à la variable aléatoire L_1. On a donc : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1$
$\Rightarrow P(L_1 = 0) + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1 \Rightarrow P(L_1 = 0) + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow P(L_1 = 0) + 1 = 1 \Rightarrow P(L_1 = 0) = 0$

On a utilisé Q1) avec $x = \frac{1}{2}$ et la somme d'une série géométrique. On a donc : $\boxed{P(L_1 = 0) = 0}$

Q6) Si L_1 admet une espérance alors : $\mathbb{E}(L_1) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kP(L_1 = k) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k2^{-k}$

En utilisant Q2), on a la convergence de la série et $\mathbb{E}(L_1) = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$

Bilan : $\boxed{L_1 \text{ admet un espérance et } \mathbb{E}(L_1) = 2}$

Cela signifie que en moyenne, la longueur de la première série est de 2.

Q7) • Si il n'y a qu'un lancer, il ne peut y avoir qu'une série donc $N_1 = 1$ de manière certaine.

• Si il y a deux lancers alors les séries possibles sont : $\begin{cases} PP \text{ et alors } N_2 = 1 \\ FF \text{ et alors } N_2 = 1 \\ PF \text{ et alors } N_2 = 2 \\ FP \text{ et alors } N_2 = 2 \end{cases}$, par équiprobabilité (pièce équilibrée) $P(N_2 = 1) = P(N_2 = 2) = \frac{1}{2}$

• Bilan : $\boxed{N_1 \text{ est la loi certaine égale à 1 et } N_2 \text{ suit une loi uniforme sur } [\![1;2]\!]}$

Q8) N_n vaut au moins 1 et la valeur est possible, par exemple si on obtient que des Piles.
Si on a une alternance à chaque lancer (PFPFPF...) alors on a $N_n = n$
Si on commence par $k \geq 1$ Pile et si ensuite on alterne F et P ($\underbrace{P \ldots P}_{k} FPFPF..$) alors $N_n = n - k + 1$

On a examiné tout les cas et on en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des valeurs prises par } N_n \text{ est } N_n(\Omega) = [\![1;n]\!]}$

Q9) • $P_n \cap P_{n+1}$ signifie que la dernière série est une série d'au moins deux Piles.
Dans ce cas, le dernier lancer n'a pas d'importance sur le nombre de série des $n+1$ premier lancers et on a donc : $\boxed{N_{n+1} = k \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}}$

• $(N_n = k) \cap P_n$ ne fait pas intervenir l'événement P_{n+1}, donc $(N_n = k) \cap P_n$ et P_{n+1} sont indépendants et donc : $P((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = P((N_n = k) \cap P_n)P(P_{n+1})$ et comme $P(P_{n+1}) = \frac{1}{2}$ alors : $P((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = P((N_n = k) \cap P_n)\frac{1}{2}$
En utilisant la relation trouvée en début de question : $\boxed{P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap P_n)}$

Q10) Il est clair, d'ailleurs l'énoncé nous le donne, que $(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$ est un système complet d'événements.
Par la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements :
$P(N_{n+1} = k)$
$= P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1})$
En utilisant la relation démontrée en Q9) et celle admises dans l'énoncé (qui se démontre de la même manière) :
$P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap P_n) + \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap F_n) + \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap P_n) + \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap F_n)$
Mais (P_n, F_n) est un système complet d'événement donc, par la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements : $P((N_n = k) \cap P_n) + P((N_n = k) \cap F_n) = P((N_n = k))$
De même $P((N_n = k-1) \cap P_n) + P((N_n = k) \cap F_n) = P((N_n = k-1))$
En revenant au début du calcul on a : $P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P((N_n = k)) + \frac{1}{2}P((N_n = k-1))$

Bilan : $\boxed{\forall k \in [\![1;n+1]\!]\ ,\ P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P((N_n = k)) + \frac{1}{2}P((N_n = k-1))}$

Q11) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in [\![1;n+1]\!]$, en multipliant la relation trouvée en Q10) par x^k on a :
$P(N_{n+1} = k)x^k = \frac{1}{2}P((N_n = k))x^k + \frac{x}{2}P((N_n = k-1))x^{k-1}$
En sommant pour $k \in [\![1;n+1]\!]$: $\sum_{k=1}^{n+1} P(N_{n+1} = k)x^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} P((N_n = k))x^k + \frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n+1} P((N_n = k-1))x^{k-1}$
On reconnaît à gauche G_{n+1}. De plus $P(N_n = n+1) = 0$ pour la première somme de droite et changement d'indice $p = k-1$ dans la dernière somme ou on utilise aussi que $P(N_n = 0) = 0$.

On a alors : $G_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} P((N_n = k))x^k}_{G_n(x)} + \frac{x}{2}\underbrace{\sum_{p=1}^{n+} P((N_n = p))x^p}_{G_n(x)}$

En ayant reconnue $G_n(x)$, on obtient : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ , \ G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2}G_n(x)}$

Q12) On remarque que, à x fixé, $(G_n(x))$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+x}{2}$ et de premier terme $G_1(x) = x$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R} \ , \ G_n(x) = x\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}}$

Q13) On sait, d'après le cours, que si G_n est dérivable à gauche en 1 (ce qui est la cas ici puisque G_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$), alors N_n admet une espérance et que $\mathbb{E}(N_n) = G'_n(1)$
En dérivant l'expression de Q11) : $G'_n(x) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} + x(n-1)\frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}$ et donc $G'_n(1) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \mathbb{E}(N_n) = \frac{n+1}{2}}$

Q14) On écrit : $G_n(x) = \frac{x}{2^{n-1}}(1+x)^{n-1}$ et on utilise la formule du binôme :
$G_n(x) = \frac{x}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{x^{k+1}}{2^{n-1}}$
Changement d'indice $K = k+1$: $G_n(x) = \sum_{K=1}^{n} \binom{n-1}{K-1} \frac{1}{2^{n-1}} x^K$

Comme on a des polynômes on peut identifier les coefficients et on en déduit que :
la loi de N_n est donnée par $\begin{cases} N_n(\Omega) = [\![1;n]\!] \\ \forall k \in N_n(\Omega) \ , \ P(N_n = k) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^{n-1}} \end{cases}$

On a donc : $\boxed{N_n - 1 \text{ suit une loi binomiale de paramètre } (n-1, \frac{1}{2})}$

PROBLEME 2

Q13) Si A et B sont symétriques positives alors : $\forall X \in M \in M_{n,1}(\mathbb{R})$
$X^T(\lambda A + \mu B)X = \lambda X^T AX + \mu X^T BX \geq 0$
De plus $\lambda A + \mu B$ est symétrique et donc $\boxed{\lambda A + \mu B \text{ est une matrice symétrique positive.}}$

Remarque : on a utilisé que l'ensemble des matrices symétriques est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Q14) $X^T AX$ étant réel alors $X^T AX = (X^T AX)^T = X^T A^T X \geq 0$ et donc

$\boxed{A \text{ symétrique positive} \Rightarrow A^T \text{ symétrique positive}}$

Remarque : A symétrique $\Rightarrow A^T$ symétrique est évident.

Q15) A symétrique réelle donc par le théorème spectral, A est diagonalisable dans une base orthonormée et
$\boxed{\text{il existe } P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et des réels } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ tels que : } A = Pdiag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^T}$

Q16) $X_i^T AX_i =< X_i, AX_i >=< X_i, \lambda_i X_i >= \lambda_i < X_i, X_i >= \lambda_i \left|\left|X_i\right|\right|^2$

On a donc : $\boxed{\lambda_i \left|\left|X_i\right|\right|^2 = X_i^T AX_i}$

Q17) X_i étant non nul on a : $\lambda_i = \frac{X_i^T AX_i}{\left|\left|X_i\right|\right|^2} \geq 0$ donc $\boxed{\text{toute les valeurs propres de } A \text{ sont positives.}}$

Q18) Si on note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A alors $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$ par Q17).
Comme $a + c = tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ alors $\boxed{a + c \geq 0}$, de même $det(A) = ac - b^2 = \lambda_1 \lambda_2 \Rightarrow \boxed{ac - b^2 \geq 0}$

Q19) $X^T AX = X^T PDP^T X = (P^T X)^T D(P^T X) = X'^T DX' = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x'^2_i$

Q20) D'après Q19) $X^T AX \geq 0$ car $\lambda_i \geq 0$ et $x'^2_i \geq 0$, ceci $\forall X$ et donc par définition : $\boxed{A \text{ est symétrique positive}}$

Q21) On a une première implication avec Q17) et la réciproque d'après Q20).
Donc, si A est symétrique : $\boxed{A \text{ est symétrique positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives}}$

Q22) Si $A = B^T B$ alors $X^T AX = X^T B^T BX = (BX)^T BX = \left|\left|BX\right|\right|^2 \geq 0$ donc A est positive, de plus $A^T = (B^T B)^T = B^T B = A$ donc A est symétrique.

Bilan : $\boxed{\text{Si } A = B^T B \text{ alors } A \text{ est symétrique positive.}}$

Q23) Si A est symétrique positive alors $A = Pdiag(\lambda_1, ..., \lambda_p)P^T$
Mais comme les λ_i sont positifs alors $A = Pdiag(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_p})diag(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_p})P^T$

En posant $B = diag(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_p})P^T$ on a $\boxed{A = B^T B}$