PSI* 2024-2025, Mathématiques DS n°6, type Mines : Correction

Exercice

Q1) On pose : $\begin{array}{cccc} \varphi & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & f(0,t)=\frac{\sin(t)}{t} \end{array}$ ainsi on doit étudier $D=\int\limits_0^{+\infty}\varphi(t)dt$

φ est continue sur $]0,+\infty[$, D pose donc problème aux bornes 0 et $+\infty$.

• **En 0**

Au voisinage de $t=0^+$: $\varphi(t)=\frac{sin(t)}{t}\sim\frac{t}{t}=1$ donc φ est prolongeable par continuité en $t=0$.

$D_1=\int\limits_0^1\varphi(t)dt$ est donc convergente, comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

• **En $+\infty$**

Soit $A>1$. Alors, par intégration par partie :

$$\int\limits_1^A\frac{sin(t)}{t}dt=\int\limits_1^A\underbrace{sin(t)}_{u'}\underbrace{\frac{1}{t}}_{v}dt=[\underbrace{-cos(t)}_{u}\underbrace{\frac{1}{t}}_{v}]_1^A-\int\limits_1^A\underbrace{-cos(t)}_{u}\underbrace{\frac{-1}{t^2}}_{v'}dt=\frac{-cos(A)}{A}+cos(1)-\int\limits_1^A\frac{cos(t)}{t^2}dt$$

Pour $t\geq A$, on a : $\left|\frac{cos(t)}{t^2}\right|\leq\frac{1}{t^2}$. De plus, par Riemann $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, par comparaison, $t\mapsto\frac{cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc $\int\limits_1^{+\infty}\frac{cos(t)}{t^2}dt$ est convergente.

Avec l'égalité obtenue par intégration par partie on obtient, puisque $\frac{-cos(A)}{A}\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}0$ (cos bornée) :

$\int\limits_1^A\varphi(t)dt\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}cos(1)-\int\limits_1^{+\infty}\frac{cos(t)}{t^2}dt\in\mathbb{R}$

$D_2=\int\limits_1^{+\infty}\varphi(t)dt$ est donc convergente.

• Comme $D=D_1+D_2$ et que D_1 et D_2 sont convergentes alors : $\boxed{D=\int\limits_0^{+\infty}\frac{sin(t)}{t}dt \text{ est convergente.}}$

Q2) Pour $x>0$ et $t\in I$ alors :$|f(x,t)|\leq exp(-xt)$ en utilisant $|sin(t)|\leq t$

Comme $x>0$, on sait d'après le cours que : $t\mapsto exp(-xt)$ est intégrable sur I, donc par comparaison $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.

Bilan : $\boxed{\forall x>0\ ,\ t\mapsto f(x,t) \text{ est intégrable sur } I}$

Q3) Pour $x>0$ on reprend l'inégalité de Q2) : $|f(x,t)|\leq exp(-xt)$ et on l'intègre entre 0 et $+\infty$.

On obtient : $|F(x)|=\left|\int\limits_0^{+\infty}f(x,t)dt\right|\leq\int\limits_0^{+\infty}|f(x,t)|\,dt\leq\int\limits_0^{+\infty}exp(-xt)dt=[\frac{-exp(-xt)}{-x}]_0^{+\infty}=\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$

Par comparaison on a bien : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0}$

Q4) • On a f qui est C^1 sur $A\times I$ de manière directe. De plus $\forall(x,t)\in A\times I\ ,\ (\frac{\partial f}{\partial x})(x,t)=-sin(t)e^{-xt}$

Soit $a>0$, on va commencer par montrer que F est C^1 sur $[a,+\infty[$

On a : $\forall(x,t)\in[a,+\infty[\times I\ ,\ \left|(\frac{\partial f}{\partial x})(x,t)\right|\leq e^{-at}$

On a donc : $\begin{cases} \text{i) } \forall t \in I \ , \ x \mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a,+\infty[\\ \text{ii) } \forall x \in [a,+\infty[\ , \ t \mapsto f(x,t) \text{ est continue par morceaux et intégrable sur } I \text{ (cf Q2)} \\ \text{iii) } \forall x \in [a,+\infty[\ , \ t \mapsto (\frac{\partial f}{\partial x})(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \text{iv) (HD) } \forall (x,t) \in [a,+\infty[\times I \ , \ \left|(\frac{\partial f}{\partial x})(x,t)\right| \leq e^{-at} \\ \text{avec } t \mapsto e^{-at} \text{ qui est intégrable sur } I \end{cases}$

On peut donc appliquer le théorème de dérivation de Leibniz pour les intégrales à paramètres et on en déduit que : F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et $\forall x \in [a,+\infty[\ , \ F'(x) = \int\limits_0^{+\infty} (\frac{\partial f}{\partial x})(x,t)dt$

Comme $\bigcup\limits_{a>0} [a,+\infty[=]0,+\infty[$ alors on en déduit :

$\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et } \forall x \in I \ , \ F'(x) = \int\limits_0^{+\infty} (\frac{\partial f}{\partial x})(x,t)dt}$

- Avec ce qui précède on a : $\forall x > 0 \ , \ F'(x) = \int\limits_0^{+\infty} -sin(t)e^{-xt}dt$

On passe par $sin(t) = Im(e^{it})$ et on obtient : $F'(x) = \int\limits_0^{+\infty} Im(-e^{it}e^{-x})dt = -Im(\int\limits_0^{+\infty} e^{t(i-x)})dt$

Comme $i - x \neq 0$ car x est réel : $F'(x) = -Im([\frac{e^{t(i-x)}}{i-x}]_0^{+\infty})$

Puisque $x > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{t(i-x)}}{i-x} = 0$ et donc $F'(x) = Im(-\frac{1}{x-i}) = Im(-\frac{x+i}{x^2+1}) = \frac{-1}{1+x^2}$

En primitivant sur I on a : $\forall x \in I \ , \ F(x) = -arctan(x) + \theta$

Avec la limite de Q3) on a : $-\frac{\pi}{2} + \theta = 0$, donc $\theta = \frac{\pi}{2}$

Finalement : $\boxed{\forall x \in I \ , \ F(x) = \frac{\pi}{2} - arctan(x)}$

Q5) Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a : $\begin{cases} \text{i) } \forall t \in [0,n] \ , \ x \mapsto f(x,t) \text{ est continue sur } A \\ \text{ii) } \forall x \in A \ , \ t \mapsto f(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } [0,n] \\ \text{iii) } \forall (x,t) \in A \times [0,n] \ , \ |f(x,t| \leq 1 \\ \text{ avec } t \mapsto 1 \text{ qui est intégrable sur } [0,n] \end{cases}$

On peut donc appliquer le théorème de continuité pour les intégrables à paramètres et on en déduit :
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ F_n \text{ est continue sur } A}$

Q6) Pour $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$ on a par la relation de Chasles :

$|F(x) - F_n(x)| = \left|\int\limits_n^{+\infty} f(x,t)dt\right| = \left|\int\limits_n^{+\infty} sin(t)\frac{e^{-xt}}{t}dt\right|$

On intègre par partie et on a :

$|F(x) - F_n(x)| = \left|[-cos(t)\frac{e^{-xt}}{t}]_n^{+\infty} + \int\limits_n^{+\infty} cos(t)\frac{d}{dt}(\frac{e^{-xt}}{t})dt\right| = \left|cos(n)\frac{e^{-xn}}{n} + \int\limits_n^{+\infty} cos(t)(\frac{-e^{-xt}}{t^2} - \frac{xe^{-xt}}{t})dt\right|$

Par inégalité triangulaire : $|F(x) - F_n(x)| \leq \left|cos(n)\frac{e^{-xn}}{n}\right| + \int\limits_n^{+\infty} |cos(t)| \frac{e^{-xt}}{t^2}dt + \int\limits_n^{+\infty} \frac{xe^{-xt}}{t}dt$

On majore $|cos(n)|$ et $|cos(t)|$ par 1 : $|F(x) - F_n(x)| \leq \left|\frac{e^{-xn}}{n}\right| + \int\limits_n^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2}dt + \int\limits_n^{+\infty} \frac{xe^{-xt}}{n}dt$

On majore les deux premiers exponentielles par 1 :

$|F(x) - F_n(x)| \leq \frac{1}{n} + \int\limits_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt + \frac{1}{n}\int\limits_n^{+\infty} xe^{-xt}dt \leq \frac{1}{n} + [\frac{-1}{t}]_n^{+\infty} + \frac{1}{n}[-e^{-xt}]_n^{+\infty} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}e^{-xn} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{n}$

On a donc $\sup\limits_{x\in A}|F(x)-F_n(x)| \leq \frac{3}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On en déduit que : $\boxed{(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } F \text{ sur } A}$

Q7) On a vu en Q5) que les F_n était continue sur A et en Q6) que (F_n) convergeait uniformément vers F sur A, la continuité étant conserver par convergence uniforme, on peut donc en conclure que : $\boxed{F \text{ est continue sur } A.}$

Q8) F est continue sur A donc en 0 et donc $F(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \big(-arctan(x) + \frac{\pi}{2}\big) = \frac{\pi}{2}$

Comme $F(0)$ est l'intégrale cherchée alors : $\boxed{\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}}$

Mines-Ponts PC mathématiques 1 , 2017

1.) $((S_k = i))_{i\in[\![1,5]\!]}$ est un système complet d'événement, donc par la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements : $P(S_{k+1}=1) = \sum\limits_{i=1}^{5} P(S_{k+1}=1|S_k=i)P(S_k=i)$
D'après la figure du labyrinthe on a : $P(S_{k+1}=1|S_k=1) = 0$
et $P(S_{k+1}=2|S_k=2) = P(S_{k+1}=1|S_k=3) = P(S_{k+1}=1|S_k=4) = P(S_{k+1}=1|S_k=5) = \frac{1}{3}$

Donc $\boxed{P(S_{k+1}=1) = \frac{1}{3}\sum\limits_{i=2}^{5} P(S_k=i)}$

2.) D'après 1.) : $P(S_{k+1}=1) = \frac{1}{3}P(S_k=2) + \frac{1}{3}P(S_k=3) + \frac{1}{3}P(S_k=4) + \frac{1}{3}P(S_k=5)$

De la même manière : $\begin{cases} P(S_{k+1}=2) = \frac{1}{4}P(S_k=1) + \frac{1}{3}P(S_k=3) + \frac{1}{3}P(S_k=5) \\ P(S_{k+1}=3) = \frac{1}{4}P(S_k=1) + \frac{1}{3}P(S_k=2) + \frac{1}{3}P(S_k=4) \\ P(S_{k+1}=4) = \frac{1}{4}P(S_k=1) + \frac{1}{3}P(S_k=3) + \frac{1}{3}P(S_k=5) \\ P(S_{k+1}=5) = \frac{1}{4}P(S_k=1) + \frac{1}{3}P(S_k=2) + \frac{1}{3}P(S_k=4) \end{cases}$

Si on écrit tout cela matricielement on a : $X_{k+1} = BX_k$ avec $\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}}$

3.) On remarque que la somme des termes sur chaque colonne vaut 1 (ce qui traduit le fait que $P_{S_k=i}$ est une probabilité).

Alors $\boxed{Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } B^T \text{ associé à la valeur propre 1.}}$

4.) On calcul $X_1 = BX_0 = \begin{pmatrix} 4\frac{3}{16}\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4}\frac{1}{4} + 2\frac{1}{3}\frac{3}{16} \\ \frac{1}{4}\frac{1}{4} + 2\frac{1}{3}\frac{3}{16} \\ \frac{1}{4}\frac{1}{4} + 2\frac{1}{3}\frac{3}{16} \\ \frac{1}{4}\frac{1}{4} + 2\frac{1}{3}\frac{3}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \end{pmatrix} = X_0$
X_0 est donc un vecteur propre de B associé à la valeur propre 1, et donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k = X_0$
et donc $\boxed{\text{les } S_k \text{ ont toutes la même loi.}}$

5.) On a $P((S_1=1)\cap(S_2=5))=0$ car on ne peut pas passer de la salle 1 à la salle 5 en une fois. Comme $P(S_1=1)\neq 0$ et $P(S_2=5)\neq 0$ alors $P((S_1=1)\cap(S_2=5))\neq P(S_1=1)P(S_2=5)$ et donc $\boxed{S_1 \text{ et } S_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

6.) Si $x\in ker(u-I_E)$ alors $u(x)=x$ et $\forall p\in\mathbb{N}\ ,\ u^p(x)=x$
Donc $r_k(x)=\frac{1}{k}(x+x+\cdots+x)=x$

Donc $\boxed{x\in ker(u-I_E)\Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x)=x}$

7.) $x\in Im(u-I_E)\Rightarrow \exists y\in E\ ,\ x=(u-I_E)(y)=u(y)-y$
Alors $u(x)=u^2(y)-u(y)$, puis, par récurrence : $\forall p\in\mathbb{N}\ ,\ u^p(x)=u^{p+1}(y)-u^p(y)$
Donc, par télescopage : $\sum\limits_{\ell=0}^{k-1}u^\ell(x)=\sum\limits_{\ell=0}^{k-1}[u^{\ell+1}(y)-u^\ell(y)]=u^k(y)-y$
Donc : $r_k(x)=\frac{u^k(y)-y}{k}$. Par l'inégalité triangulaire : $||r_k(x)||\leq\frac{||u^k(y)||+||(y||}{k}$
Comme u est contractante ($||u(y)||\leq||y||$) alors $||r_k(x)||\leq\frac{2||(y||}{k}\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0$
On en déduit, par comparaison : $||r_k(x)||\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0$

Donc $\boxed{x\in Im(u-I_E)\Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x)=0_E}$

8.) Soit $x\in ker(u-I_E)\cap Im(u-I_E)$
Alors avec 6.) et 7.) on a : $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x)=0_E$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x)=x$ donc $x=0_E$
et donc $ker(u-I_E)\cap Im(u-I_E)\subset\{0_E\}$
Comme l'autre inclusion est évidente : $ker(u-I_E)\cap Im(u-I_E)=\{0_E\}$
La somme $ker(u-I_E)+Im(u-I_E)$ est donc directe et alors :
$ker(u-I_E)+Im(u-I_E)=ker(u-I_E)\oplus Im(u-I_E)$

Si on passe à la dimension :
$dim(ker(u-I_E)\oplus Im(u-I_E))=dim(ker(u-I_E))+dim(Im(u-I_E))=dim(E)$ par le théorème du rang.
Donc $dim(ker(u-I_E)\oplus Im(u-I_E))=dim(E)$ et comme $ker(u-I_E)\oplus Im(u-I_E)\subset E$ alors : $\boxed{E=ker(u-I_E)\oplus Im(u-I_E)}$

9.) Soit $x\in E$. On écrit $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in ker(u-I_E)$ et $x_2\in Im(u-I_E)$ selon la décomposition trouvée en 8.).

Alors comme r_k est linéaire on a : $r_k(x)=r_k(x_1)+r_k(x_2)$
Avec 6.) $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x_1)=x_1$ et avec 7.) $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x_2)=0_E$

On a donc $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x)=x_1$

$(r_k(x))$ converge donc vers un vecteur que l'on note $p(x)$.

Avec les notations choisies, on à que :
$\boxed{p \text{ est la projection sur } ker(u-I_E) \text{ parallèlement à } Im(u-I_E)}$

10.) Si on note u l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ admettant A comme matrice relativement à la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
Alors, u vérifie les propriétés de l'endomorphisme étudié de 1.) à 9.).
Matricielement $r_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} p$ se traduit par $R_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P$ avec P la matrice de p relativement à la base canonique.
Comme p est un projecteur alors $p^2 = p$ et donc $P^2 = P$

On a : $\boxed{\text{la suite de matrice } (R_k) \text{ converge dans } M_n(\mathbb{R}) \text{ vers une matrice } P \text{ vérifiant } P^2 = P}$

11.) La i-ième coordonnée de AU vaut $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$ donc :
$AU = U \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ et on a bien : $\boxed{(4) \Leftrightarrow AU = U}$

12.) Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathbb{E}$.
Alors $(AB)U = A(BU) = AU = U$ puisque A et B vérifie (4). En utilisant 11. on a AB vérifie (4)

Si on note $AB = (c_{i,j})$ alors $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{a_{i,k}}_{\geq 0}\ \underbrace{b_{k,j}}_{\geq 0} \geq 0$ et donc AB vérifie (3)

AB vérifie (3) et (4) donc $AB \in \mathbb{E}$

Bilan : $\boxed{\mathbb{E} \text{ est stable par produit.}}$

13.) • Soit $\left(A_n = \left(a_{n,i,j}\right)\right)$ une suite d'éléments de $\mathbb{E}$ convergeant vers $A = (a_{i,j})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{a_{n,i,j}}_{\geq 0} = a_{i,j} \geq 0$ donc A vérifie (3)
On a $A_nU = U$ et en passant à la limite $AU = U$ et donc A vérifie (4)
On a donc bien $A \in E$.
Par la caractérisation séquentielle, on a donc $\mathbb{E}$ fermé.

• Soit $A = (a_{i,j}) \in E$ et $B = (b_{i,j}) \in E$ et $\lambda \in [0,1]$. On pose $C = \lambda A + (1-\lambda)B = (c_{i,j})$
Alors $c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + (1-\lambda)b_{i,j} \geq 0$ comme somme de termes positifs donc C vérifie (3)
De plus $CU = \lambda AU + (1-\lambda)BU = \lambda U + (1-\lambda)U = U$ et donc C vérifie (4)
On a donc : $\forall A, B \in \mathbb{E}\ ,\ \forall \lambda \in [0,1]\ ,\ \lambda A + (1-\lambda)B \in \mathbb{E}$ et donc $\mathbb{E}$ est convexe.

• Conclusion : $\boxed{\mathbb{E} \text{ est une partie fermée et convexe de } M_n(\mathbb{R}).}$

14.) Soit $A \in \mathbb{E}$ et $X = (x_k) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$
On pose $Y = AX = (y_k)$.
Alors, pour $i \in [\![1,N]\!]\ ,\ y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$, donc $|y_i| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\,|x_j|$ puisque les $a_{i,j}$ sont positifs.
On utilise la définition de $||.||_\infty$ et on a : $|y_i| \leq \underbrace{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)}_{=1} ||x_j||_\infty$
Puis, comme A vérifie (4) : $|y_j| \leq ||x_j||_\infty$
On peut alors passer au sup sur $j \in [\![1,n]\!]$ et obtenir : $||Y||_\infty = ||AX||_\infty \leq ||X||_\infty$

Donc : $\boxed{\text{Si } A \in \mathbb{E} \text{ alors } \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\ ,\ ||AX||_\infty \leq ||X||_\infty}$

15.) • On note $A^p = (\alpha_{i,j})$ et on a donc $\alpha_{i,j} > 0$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\ker(A^p - I_n)$ On pose : $x_s = \max\limits_{1\leq j\leq n} x_j$

Alors $A^pX = X$ et donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}x_j$

Mais on a de plus $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = 1$ car $A^p \in \mathbb{E}$ puisque $\mathbb{E}$ est stable par produit.

On a donc $\underbrace{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right)}_{=1} x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}x_j$ ou encore $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}(x_i - x_j) = 0$

On écrit cette égalité pour $i = s$ et on a : $\sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{\alpha_{i,j}}_{>0} \underbrace{(x_s - x_j)}_{\geq 0} = 0$

On a un somme de terme positifs nulle donc : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_{i,j}(x_i - x_j) = 0$ et comme $\alpha_{i,j} > 0$ on a $x_s - x_j = 0$ et donc $x_j = x_s$
On a donc $X = x_sU$ et donc $ker(A^p - I_n) \subset Vect(U)$

• Comme $A^p \in \mathbb{E}$ alors $A^pU = U$ donc $U \in ker(A^p - I_n)$ et on a $Vect(U) \subset \ker(A^p - I_n)$

• Par double inclusion on a donc : $Vect(U) = \ker(A^p - I_n)$ et donc $\boxed{ker(A^p - I_n) \text{ est de dimension 1.}}$

16.) On a montrer en 15.) que : $\ker(A^p - I_n) = Vect(U)$

Soit $X \in ker(A - I_n)$ alors $AX = X$ et donc $A^pX = X$, donc $X \in ker(A^p - I_n) = Vect(U)$, donc $ker(A - I_n) \subset Vect(U)$
Comme $A \in \mathbb{E}$ alors $AU = U$ et donc $Vect(U) \subset ker(A - I_n)$

Par double inclusion on a donc montrer que : $\boxed{ker(A - I_n) = Vect(U)}$

17.) Comme $\mathbb{E}$ est stable par produit, alors A, A^2,..., A^{k-1} sont stochastique. De plus I_n est stochastique.
La somme de termes positifs est positifs donc R_k vérifie (3)
De plus $R_kU = \frac{1}{k}(\sum\limits_{\ell=0}^{k-1} A^\ell U) = \frac{1}{k}(\sum\limits_{\ell=1}^{n-1} U) = U$ et donc R_k vérifie (4)

Finalement on a bien : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \text{ , } R_k \text{ est un matrice stochastique.}}$

18.) Avec 14.) , $||AX||_\infty \leq ||X||_\infty$, donc on peut utiliser la question 10.) et on a (R_k) qui converge vers une matrice P telle que $P^2 = P$
Comme $\mathbb{E}$ est fermée et que les R_k sont dans $\mathbb{E}$ alors $P \in \mathbb{E}$ donc P est stochastique.
De plus P est la matrice de la projection sur $ker(A - I_n)$ qui est de dimension 1, donc P est de rang 1.

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (R_k) \text{ converge dans } M_n(\mathbb{R}) \text{ vers une matrice stochastique de rang 1.}}$

19.) P est la matrice de la projection sur $ker(A - I_n) = Vect(U)$ donc $Im(P) = Vect(U)$ et donc les colonnes de P que l'on note momentanément C_k sont proportionnelles à U. Si on note $C_k = \lambda_kU$ on a alors $P = UL$ avec $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Comme P est à coefficients positifs alors les λ_k sont positifs.
$P^2 = P \Rightarrow (UL)(UL) = UL \Rightarrow U \underbrace{(LU)}_{\in\mathbb{R}} L = UL \Rightarrow (LU)UL = UL \Rightarrow (LU)P = P \Rightarrow LU = 1$ car P est non nulle
Mais $LU = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ et comme les λ_k sont positifs alors L est une matrice stochastique.

On a donc : $\boxed{P = LU \text{ avec } L = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix} \text{ une matrice stochastique.}}$

20.) • $R_k = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell$ donc $R_kA = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} A^{\ell+1} = \frac{1}{k}\big(\sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell - I_n + A^k\big) = R_k + \frac{A^k - I_n}{k}$

On passe alors à la limite dans : $R_kA = R_k + \frac{A^k-I_n}{k}$
Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{A^k-I_n}{k} = 0_E$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} R_k = P$ on en déduit $\boxed{PA = P}$

• $PA = P \Rightarrow ULA = UL \Rightarrow LULA = LUL$ mais on a vu que $LU = 1$ donc $LA = L$
L est donc une matrice stochastique vérifiant $LA = L$
En transposant : $A^TL^T = L^T$ donc L^T est un vecteur propre de A^T associé à la valeur propre 1.

On a vu en 16.) que $dim(ker(A - I_n) = 1$. On sait aussi que $(A - I_n)$ et $(A - I_n)^T = A^T - I_n$ on même rang, donc $dim(ker(A^T - I_n) = 1$.
Donc si $\hat{L}$ est une autre matrice stochastique telle que $\hat{L}A = \hat{L}$ alors $\hat{L} = \alpha L$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
En sommant tout les coefficients de ces deux vecteurs on obtient $1 = \alpha$ puisque les matrices lignes sont stochastiques.

Bilan : $\boxed{L \text{ est la seul matrice ligne stochastique vérifiant } LA = L}$

21.) On a déjà vu que les λ_k était positifs, reste à montrer qu'ils sont non nuls.
On a : $LA = L$ et par itération $LA^p = L$ donc $\lambda_j = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda_k}_{\geq 0} \underbrace{(A^p)_{j,k}}_{>0}$
Si on avait un $\lambda_j = 0$ alors avec la relation ci-dessus, tout les λ_j serait nul et donc on aurait $L = 0$ ce qui est impossible car L est stochastique.

$\boxed{\text{Les coefficients de } L \text{ sont tous strictement positifs.}}$

22.) On note u l'endomorphisme associé à A et on a vu que en 8.) que :
$E = ker(u - I_E) \oplus Im(u - I_E)$
On pose $G = Im(u - I_E)$. Si $x \in G$ alors $\exists y \in E\ ,\ x = u(y) - y$
Alors $u(x) = u(u(y) - y) = u(u(y)) - u(y) = (u - I_E)(u(y)) \in G$ donc G est stable par u et on peut poser $v = u|_G$.
Si on écrit la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe alors elle est de la forme $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & A'\end{pmatrix}$ avec $A' \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice de v.
Si on passe au polynôme caractéristique alors on en déduit : $\chi_u(X) = (X - 1)\chi_v(X)$

Si 1 était racine de χ_v alors on aurait $Z \in G$ tel que $Z \neq 0$ et $v(Z) = Z$ et donc $u(Z) = Z$, soit encore $Z \in ker(u - I_E)$ mais $ker(u - I_E) \cap G = \{0_E\}$ donc $Z = 0$ absurde donc 1 n'est pas racine de χ_v
Finalement 1 est racine simple de χ_u et donc $\boxed{\text{1 est racine simple de la matrice } A.}$

23.) Cherchons L telle que $LA = L$ alors $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
Cette valeur est donné en 3.)

Comme $P = UL$ alors $\boxed{P = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$

24.) Si S_0 est une loi qui convient alors $BX_0 = X_0$ et donc $X_0^T = B^T X_0$
Comme X_0 est stochastique on a démonter précédemment que X_0 était unique.
C'est alors la valeur donnée en 23.)

Pour que le rat est la même probabilité à tout moment d'être dans la même pièce il faut impérativement que : $\boxed{X_0 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}$