Feuille d'exercices n°58 : révisions concours blancs

Exercice 450. *(Hadamard, matrice à diagonale dominante)*
Soit $A = (a_{i,j})$ *une matrice de* $M_n(\mathbb{C})$ *vérifiant :* $\forall i \in [\![1, n]\!]\ ,\ |a_{i,i}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$

En utilisant la norme infinie et le noyau montrer que A *est inversible.*

Exercice 451. *(Matrices compagnons)*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels.*

On pose $P_n(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & X + a_n \end{vmatrix}$

$P_n(X)$ *est le déterminant d'une matrice carrée de* $M_{n+1}(\mathbb{R})$

Déterminer une expression développée de $P_n(X)$

Exercice 452. *Cet exercice présente une preuve du théorème de Hamilton-Cayley*
Soit E *un espace vectoriel de dimension* $n \geq 1$ *et* $u \in L(E)$.
On note χ_u *le polynôme caractéristique de* u.
On veut donc montrer que : $\chi_u(u) = 0_{L(E)}$

Soit x *un vecteur non nul de* E.

a) Justifier l'existence de $p = inf(\{k \in \mathbb{N}\ ,\ (x, u(x), \dots, u^k(x))$ *est libre* $\})$

On complète alors $(x, u(x), \dots, u^k(x))$ *en* $B = (x, u(x), \dots, u^k(x), e_{k+1}, \dots, e_n)$ *une base de* E.

b) Donner la forme de A *la matrice de* u *relativement à* B.

c) En utilisant l'exercice précédent, montrer que : $\chi_u(x) = 0_E$

d) Conclure

Exercice 453. *Un théorème de point fixe*
Soit $I = [a, b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *de longueur non nulle et* f *une application continue de* I *dans* I.
Montrer que f *admet un point fixe sur* I *autrement dit,*
qu'il existe $a \in I$ *tel que* $f(a) = a$

Exercice 454. *Un autre théorème de point fixe*
Soit $I = [a, b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *de longueur non nulle et* f *une application* k *Lipschitzienne de* I *dans* I *avec* $0 < k < 1$.
Montrer que f *admet un unique point fixe sur* I.

Exercice 455. *Encore un autre théorème de point fixe* ($\star$)
Soit $I = [a, b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *de longueur non nulle et soit* f *une fonction croissante de* I *dans* I. *On pose* $A = \{x \in I \ , \ f(x) \geq x\}$

a) Montrer que A *est non vide.*
b) Montrer que f *admet un point fixe sur* I.

Exercice 456. *Soit* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = \frac{3cos(u_n)}{\pi}$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

Exercice 457. *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$: $u_n(x) = nx^2 exp(-x\sqrt{n})$

1) *Montrer que* $\sum u_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}^+$.

2) *Montrer que* $\sum u_n$ *ne converge pas normalement sur* $\mathbb{R}^+$.

3) *Soit* $a > 0$. *Montrer que* $\sum u_n$ *converge normalement sur* $[a, +\infty[$

4) *Montrer que* $\sum u_n$ *ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}^+$.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+\ ,\ S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$

5) *Montrer que* S *est continue sur* $]0, +\infty[$

6) *Montrer que* S *est de classe* C^1 *sur* $]0, +\infty[$

7) ($\star$) *Etudier la continuité de* S *en* 0.

Exercice 458. *Montrer que :* $F = \int\limits_0^{+\infty} sin(t^2)dt$ *est convergente.*