Mathématiques : Correction du devoir à la maison n°12

Exercice 1 : e3a 2024 PSI, exercice 4

1.1.1) D'après le cours, pour h au voisinage de 0 : $\boxed{(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2 + o(h^2)}$

1.1.2) Pour t au voisinage de 1, on pose $t = 1+h$, ainsi h est au voisinage de 0. Alors avec le 1.1.1) :
$1 - t^\alpha = 1 - (1+h)^\alpha = -\alpha h - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2 + o(h^2)$

Comme $\alpha > 0$ et donc $\alpha \neq 0$, alors : $\boxed{1 - t^\alpha \sim -\alpha(t-1) \text{ pour } t \text{ au voisinage de } 1}$

1.2) D'après le cours et le critère de Riemann : $\boxed{\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^\beta}dt \text{ converge} \Leftrightarrow \beta > 1}$

1.3) $t \mapsto \frac{1-t^{1/n}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$ est continue sur $[0,1[$. γ_n pose donc problème seulement en 1.
Au voisinage de $t = 1$, en posant $t = 1-h$ et en utilisant le 1.1.2) on a :
$\frac{1-t^{1/n}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{\frac{1}{n}h}{h^{1+1/n}} \sim \frac{1}{nh^{1/n}} > 0$ car $t \in [0,1[$ donc $h > 0$

Alors γ_n de même nature que $\int_0^1 \frac{1}{n(1-t)^{1/n}}dt$
Mais $n \geq 2$ donc $\frac{1}{n} < 1$ et donc (avec 1.2), $\boxed{\gamma_n \text{ est convergente.}}$

2.1) Posons : $\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ A(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2}$
Alors A est C^∞ et $A'(t) = e^t - 1 - t$ et $A''(t) = e^t - 1$ On a donc :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$A''(t)$		-	0	$+$	
$A'(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$A'(t)$		$+$	0	$+$	
$A(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit : $\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ A'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + t \leq e^t$ et $\forall t \leq 0\ ,\ A(t) \leq 0 \Leftrightarrow e^t \leq 1 + t + \frac{t^2}{2}$

On a donc : $\boxed{\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ 1 + t \leq e^t \\ \forall t \leq 0\ ,\ e^t \leq 1 + t + \frac{t^2}{2} \end{cases}}$

2.2.1) On remarque que : $\frac{d}{du}(U_m) = U_{m-1}$
Donc : $\frac{d}{du}(U_{2p+1} - e^u) = U_{2p} - e^u \geq 0$ d'après l'inégalité supposée.
Mais, en $u = 0$ on a $U_{2p+1} - e^u = 0$, donc comme $u \mapsto U_{2p+1} - e^u$ est croissante sur $]-\infty, 0]$ alors :
$\boxed{\forall u \leq 0\ ,\ U_{2p+1} \leq e^u}$

2.2.2) $\frac{d}{du}(U_{2p+2} - e^u) = U_{2p+1} - e^u \leq 0$ pour $u \leq 0$ d'après l'inégalité de 2.2.1).
Mais, en $u = 0$ on a $U_{2p+2} - e^u = 0$, donc comme $u \mapsto U_{2p+2} - e^u$ est décroissante sur $]-\infty, 0]$ alors : $\boxed{\forall u \leq 0 \ , \ e^u \leq U_{2p+2}}$

2.3) On a démontré par récurrence (initialisation en 2.1) et hérédité en 2.2)) que :
$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \ , \ \forall u \leq 0 \ , \ U_{2p-1} \leq e^u \leq U_{2p}}$

3.) Soit $n \geq 2$, $p \geq 1$ et $t \in]0, 1[$.
On utilise le 2.3) avec $u = \frac{ln(t}{n} < 0$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k!}(\frac{ln(t)}{n})^k \leq exp(\frac{ln(t)}{n}) \leq \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!}(\frac{ln(t)}{n})^k$$

$$\Rightarrow - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!}(\frac{1}{n}ln(t))^k \leq -exp(\frac{1}{n}ln(t)) \leq - \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k!}(\frac{1}{n}ln(t))^k$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!}(\frac{1}{n}ln(t))^k \leq 1 - exp(\frac{1}{n}ln(t)) \leq 1 - \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k!}(\frac{1}{n}ln(t))^k}$$

4.) $t \mapsto \frac{ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}}$ est continue sur $]0, 1[$. l'intégrale proposée pose problème en 0 et en 1.

En $t = 0$: $\frac{ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}} \sim ln^p(t) = o(\frac{1}{\sqrt{t}})$ (par comparaison ln-puissance) et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$, donc, par négligeabilité, $t \mapsto \frac{ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}}$ est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$

En $t = 1$, on a l'équivalent : $\frac{ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}} \sim \frac{-(1-t)^p}{(1-t)^{1+1/n}} = \frac{-1}{(1-t)^{1/n+1-p}}$
Mais $n \geq 2$ et $p \geq 1$ donc $\underbrace{\frac{1}{n}}_{\leq \frac{1}{2}} + \underbrace{1-p}_{\leq 0} < 1$ et donc $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^{1/n+1-p}}$ est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$ (Par Riemann), et par équivalent, $t \mapsto \frac{ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}}$ est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$

Finalement $t \mapsto \frac{ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ et $\boxed{\int_0^1 \frac{ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}} dt \text{ est convergente.}}$

5.) On sait que : $\forall u \leq 0 \ , \ 1 + u \leq e^u \leq 1 + u + \frac{u^2}{2}$
On l'applique a $u = \frac{1}{n}ln(t) < 0$ pour $t \in]0, 1[$ et $n \geq 2$

Alors : $1 + \frac{1}{n}ln(t) \leq exp(\frac{1}{n}ln(t)) \leq 1 + \frac{1}{n}ln(t) + \frac{1}{2n^2}(ln(t))^2$

On multiplie par -1 et on change le sens de l'inégalité :
$-1 - \frac{1}{n}ln(t) - \frac{1}{2n^2}(ln(t))^2 \leq -exp(\frac{1}{n}ln(t)) \leq -1 - \frac{1}{n}ln(t)$

On rajoute 1 : $-\frac{1}{n}ln(t) - \frac{1}{2n^2}(ln(t))^2 \leq 1 - exp(\frac{1}{n}ln(t)) \leq -\frac{1}{n}ln(t)$

On multiplie par $\frac{1}{(1-t)^{1+1/n}} > 0$ et on a :
$\frac{1}{n}\frac{-ln(t)}{(1-t)^{1+1/n}} - \frac{1}{2n^2}\frac{ln^2(t)}{(1-t)^{1+1/n}} \leq \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{(1-t)^{1+1/n}} \leq -\frac{1}{n}\frac{-ln(t)}{(1-t)^{1+1/n}}$

On peut intégrer entre 0 et 1 puisque l'on a montrer que toutes les intégrales convergeaient et on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-ln(t)}{(1-t)^{1+1/n}} dt - \frac{1}{2n^2}\int_0^1 \frac{ln^2(t)}{(1-t)^{1+1/n}} dt \leq \gamma_n \leq \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-ln(t)}{(1-t)^{1+1/n}} dt}$$

6.) On pose : $\forall n \geq 2$, $\forall t \in]0,1[$, $f_n(t) = \frac{ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}}$ et $G(t) = \frac{ln^p(t)}{1-t}$

Alors $\forall t \in]0,1[$, $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{ln^p(t)}{1-t} = G(t)$

De plus $1 + \frac{1}{n} \geq 1$ donc $0 \leq |f_n(t)| \leq -G(t)$

De plus G est intégrable sur $]0,1[$ car $G(t) = o(\frac{1}{\sqrt{t}})$ au voisinage de 0 et $G(t) \sim \frac{(t-1)^p}{1-t} \underset{t\to1^-}{\longrightarrow} 0$ en $t=1$

Les f_n étant de plus continue par morceaux sur $]0,1[$, on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \frac{ln^p(t)}{(1-t)^{1+t/n}}dt = \int\limits_0^1 \frac{ln^p(t)}{1-t}dt}$

7.) Avec 5.) on a : $\underbrace{\int\limits_0^1 \frac{-ln(t)}{(1-t)^{1+1/n}}dt}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\int\limits_0^1 \frac{ln(t)}{1-t}dt} - \frac{1}{2n}\underbrace{\int\limits_0^1 \frac{ln^2(t)}{(1-t)^{1+1/n}}dt}_{O(1)} \leq n\gamma_n \leq \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{-ln(t)}{(1-t)^{1+1/n}}dt}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\int\limits_0^1 \frac{ln(t)}{1-t}dt}$

On utilise le 6.) pour $p=1$ et en passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n\gamma_n = \int\limits_0^1 \frac{-ln(t)}{1-t}dt}$

8.) Soit $\epsilon \in]0,1]$, alors $t \mapsto -ln(t)t^p$ est continue sur $]0,1]$ donc on peut calculer : $\int\limits_\epsilon^1 -ln(t)t^p dt$

En intégrant par partie :

$\int\limits_\epsilon^1 -ln(t)t^p dt = [-ln(t)\frac{t^{p+1}}{p+1}]_\epsilon^1 + \int\limits_\epsilon^1 \frac{1}{t}\frac{t^{p+1}}{p+1}dt = ln(\epsilon)\frac{\epsilon^{p+1}}{p+1} + \int\limits_\epsilon^1 \frac{t^p}{p+1}dt = ln(\epsilon)\frac{\epsilon^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{\epsilon^{p+1}}{(p+1)^2} \underset{\epsilon\to0}{\longrightarrow} \frac{1}{(p+1)^2} \in \mathbb{R}$

On en déduit que : $\boxed{\int\limits_0^1 -ln(t)t^p dt \text{ existe.}}$

9.) Le calcul de 8.) permet d'affirmer que : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \ , \ \int\limits_0^1 -ln(t)t^p dt = \frac{1}{(p+1)^2}}$

10.) • On pose : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]0,1[$, $h_p(t) = -ln(t)t^p$

• Alors les h_p, comme les h_p sont de signe constant sur $]0,1[$, avec 8.) on a que les h_p sont intégrables sur $]0,1[$

• Comme $\forall t \in]0,1[$, $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} t^p = \frac{1}{1-t}$ (cours : série géométrique) alors : $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} h_p(t)$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $t \mapsto H(t) = \frac{-ln(t)}{1-t}$ qui est continue par morceaux sur $]0,1[$

• De pus $\sum \int\limits_0^1 |h_p(t)|\, dt = \sum \frac{1}{(p+1)^2}$ est une série de Riemann convergente.

• On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on en déduit :
$\boxed{\int\limits_0^1 \frac{-ln(t)}{1-t}dt = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+p)^2}}$

11.) De 7.) et 10.) on déduit : $n\gamma_n = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+p)^2} + o(1)$

Donc $n\gamma_n = \sum\limits_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} + o(1) \Rightarrow n\gamma_n = \frac{\pi^2}{6} + o(1)$ et donc $\boxed{\gamma_n = \frac{\pi^2}{6n} + o(\frac{1}{n})}$

Problème 1 : ccINP 2024 PSI, problème 1 : file d'attente

Q1) On remarque que $T_1(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(T_1 = k) = (\bigcap_{i=1}^{k-1}(X_i = 0)) \cap (X_k = 1)$

(avec la convention $\bigcap_{i=1}^{k-1}(X_i = 0) = \Omega$ si $k = 1$)

Comme les (X_i) sont indépendantes alors $\mathbb{P}(T_1 = k) = [\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_i = 0)]\mathbb{P}(X_k = 1)$.

Comme les X_k suivent des loi de Bernoulli de paramètre p alors : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ \mathbb{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}p}$

Remarque : on est dans la situation type d'une loi de géométrique de paramètre p.

Q2) On remarque que $(A, (T_1 = k)_{k\in\mathbb{N}^*})$ est un système complet d'événements donc : $\boxed{A = \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty}(T_1 = k)}}$

Comme les $(T_1 = k)$ sont incompatibles alors : $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1 - p \in]-1, 1[$ et de premier terme p.
Donc, d'après le cours : $\mathbb{P}(A) = 1 - p\frac{1}{1-(1-p)} = 1 - 1 = 0$

On a donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = 0 \text{ et donc la probabilité qu'aucun client n'arrive est nulle. On a } T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$

Q3) $G_{T_1}(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_1 = j)t^j = \sum_{j=1}^{+\infty}(1-p)^{j-1}pt^j = pt\sum_{j=1}^{+\infty}((1-p)t)^{j-1}$

Comme on a une série géométrique de raison $(1-p)t$ on sait qu'elle converge
si et seulement si $|(1-p)t| < 1 \Leftrightarrow |t| < \frac{1}{1-p}$

Le rayon de convergence de G_{T_1} vaut donc $R = \frac{1}{1-p}$ De plus, la somme vaut alors : $G_{T_1}(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$

$\boxed{\text{On a : } R = \frac{1}{1-p} \text{ et } \forall t \in]-R, R[\ , \ G_{T_1}(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}}$

Q4) Le rayon de convergence de G_{T_1} est $R = \frac{1}{1-p} > 1$, donc 1 est à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convegence de cette série entière, donc G_{T_1} est dérivable deux fois à gauche en $t = 1$ et donc d'après le cours :

$$\begin{cases} E(T_1) = G'_{T_1}(1) \\ V(T_1) = G''_{T_1}(1) + G'_{T_1}(1) - (G'_{T_1}(1))^2 \end{cases}$$

$G'_{T_1}(t) = p\frac{(1-(1-p)t)+t(1-p)}{(1-(1-p)t)^2} = \frac{p}{(1-(1-p)t)^2}$ et $G''_{T_1}(t) = \frac{2(1-p)p}{(1-(1-p)t)^3}$

Donc $\begin{cases} E(T_1) = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \\ V(T_1) = \frac{2(1-p)p}{p^3} + \frac{1}{p} - (\frac{1}{p})^2 = \frac{2(1-p)p+p^2-p}{p^3} = \frac{2(1-p)+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \end{cases}$

On a donc : $\boxed{E(T_1) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}}$

Q5) • Par linéarité de l'espérance : $E(D_n) = \sum_{k=1}^{n} E(T_k)$. Comme les T_k suivent toutes la même loi :
$E(D_n) = nE(T_1)$ et avec la question 4) : $E(D_n) = \frac{n}{p}$

• La variance n'est pas linéaire, mais comme les T_k sont indépendantes : $V(D_n) = \sum_{k=1}^{n} V(T_k)$ et comme les T_k ont même loi : $V(D_n) = nV(T_1) = \frac{(1-p)n}{p^2}$

• Comme les T_k sont indépendantes alors : $G_{D_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{T_k}(t)$. Comme les T_k suivent la même loi et ont la même fonction génératrice, alors : $G_{D_n}(t) = (\frac{pt}{1-(1-p)t})^n$

On a donc : $\boxed{E(D_n) = \frac{n}{p},\ V(D_n) = \frac{n(1-)p}{p^2} \text{ et } G_{D_n}(t) = \frac{p^n t^n}{(1-(1-p)t)^n}}$

Q6) • D'après le cours : : $\boxed{\forall x \in]-1, 1[\ ,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k}$

• $G_{D_n}(t) = p^n t^n (1-(1-p)t)^{-n}$ donc G_{D_n} a pour rayon de convergence $\frac{1}{1-p}$ et $\forall t \in]\frac{-1}{1-p}; \frac{1}{1-p}[$,

$G_{D_n}(t)$

$= p^n t^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!} (-(1-p)t)^k$

$= p^n t^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\frac{(-1)^k (n+k-1)!}{(n-1)!}}{k!} (-1)^k ((1-p)t)^k$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k t^{n+k}$

On effectue le changement d'indice : $K = n+k$ et on a : $G_{D_n}(t) = \sum_{K=n}^{+\infty} \binom{K-1}{K-n} p^n (1-p)^{K-n} t^K$

Comme $G_{D_n}(t) = \sum_{K=0}^{+\infty} \mathbb{P}(D_n = K) t^K$ alors, par unicité du DSE_0 (ou alors comme la fonction génératrice caractérise la loi - et en revenant à des petit k) : $\boxed{\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\ ,\ \mathbb{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{si } k \geq n \end{cases}}$

Q7) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = aexp(a(x-1)) > 0$ donc f est strictement croissante.

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $z_n \in]0, 1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$

Initialisation : Au rang $n = 1$, on a bien $z_1 \in]0, 1[$ par hypothèse et $z_{n+1} - z_n = z_2 - z_1$ donc est du même signe que lui même.

Hérédité : On suppose l'hypothèse vérifiée au rang n et on la montre au rang $n+1$:
$z_n \in]0, 1[\Rightarrow 0 < z_n < 1 \Rightarrow f(0) < f(z_n) < f(1)$ car f est strictement croissante.
Mais $f(0) = exp(-a) > 0$ et $f(1) = exp(0) = 1$ donc, comme $f(z_n) = z_{n+1}$ alors $0 < z_{n+1} < 1$
De plus : $z_{n+1} - z_n > 0 \Rightarrow z_{n+1} > z_n \Rightarrow f(z_{n+1}) > f(z_n) \Rightarrow z_{n+2} > z_{n+1}$
et de même $z_{n+1} - z_n < 0 \Rightarrow z_{n+1} < z_n \Rightarrow f(z_{n+1}) < f(z_n) \Rightarrow z_{n+2} < z_{n+1}$
$z_{n+2} - z_{n+1}$ est donc du même signe que $z_{n+1} - z_n$ qui est du même signe que $z_2 - z_1$ donc $z_{n+2} - z_{n+1}$ est du même signe que $z_2 - z_1$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ z_n \in]0, 1[\text{ et } z_{n+1} - z_n \text{ est du même signe que } z_2 - z_1}$

Q8) D'après Q8), $z_{n+1} - z_n$ est de signe constant, donc (z_n) est monotone, comme elle bornée, on en déduit que : $(z_n)_{\in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers une limite ℓ.
Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ 0 < z_n < 1$ alors $0 \leq \ell \leq 1$
De plus, en passant à la limite dans $z_{n+1} = f(z_n)$ on obtient $\ell = f(\ell)$ car f est continue.

$\boxed{(z_n)_{\in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente vers une limite } \ell \in [0, 1] \text{ vérifiant } f(\ell) = \ell.}$

Q9) Soit $x > 0$ alors :

$0 \leq \Psi(x)$
$\Leftrightarrow 0 \leq ln(x) - a(x-1)$
$\Leftrightarrow a(x-1) \leq ln(x)$ on utilise que exp est une bijection croissante (et sa réciproque est aussi croissante)
$\Leftrightarrow exp(a(x-1) \leq x$
$\Leftrightarrow f(x) \leq x$

$$\Psi(x) = 0 \Leftrightarrow ln(x) - a(x-1) = 0 \Leftrightarrow ln(x) = a(x-1) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{exp est bijective}} x = exp(a(x-1)) = f(x)$$

On a donc : $\boxed{\forall x > 0 \ , \ 0 \leq \Psi(x) \Leftrightarrow f(x) \leq x \text{ et } \Psi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x}$

Q10) • On suppose $a \leq 1$ et on étudie Ψ qui est dérivable sur $]0,1]$
$\Psi'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x} \geq 0$ car $a \leq 1$ et $0 < x \leq 1$ donc $ax \leq 1$. Alors :

x	0		1
$\Psi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

On a donc : $\boxed{\Psi(x) < 0 \text{ sur }]0,1[\text{ et } \Psi \text{ ne s'annule que en } x = 1.}$

• Comme $f(0) > 0$, 0 n'est pas solution de $f(x) = x$, et vu que $f(x) = x \Leftrightarrow \Psi(x) = 0$, on a finalement une unique solution à $f(x) = x$ qui est $x = 1$, c'est donc, d'après Q8) la limite de (z_n).

On a donc : $\boxed{z_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1}$

Q11) La dérivée de Ψ reste valable mais cette fois $\frac{1}{a} \in]0,1[$ car $a > 1$. On a le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{a}$		1
$\Psi'(x)$		$+$	0	-	
$\Psi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\Psi(\frac{1}{a}) > 0$	$\searrow$	0

D'après ce tableau de variation, Ψ est strictement croissante et continue sur $]0, \frac{1}{a}[$, donc $\Psi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0, \frac{1}{a}[$.
De même $\Psi(x) = 0$ n'admet que $x = 1$ comme solution sur $[\frac{1}{a}, 1]$

Comme $\Psi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ on a donc $f(x) = x$ qui admet exactement deux solutions, $x = 1$ et $x = \alpha$ avec $\alpha \in]0, \frac{1}{a}[$.

Cas 1 : $z_1 \in]0, \alpha]$ alors $\Psi(z_1) < 0$ et donc, avec Q9) : $f(z_1) > z_1$ donc $z_2 > z_1$ et donc (z_n) est croissante. On a (z_n) croissante et $z_n \leq \alpha$. De plus (z_n) converge vers une solution de $f(\ell) = \ell$, on en déduit $\ell = \alpha$

Cas 2 : $z_1 \in]\alpha, 1[$ alors $\Psi(z_1) \geq 0$ et donc, avec Q9) : $f(z_1) \leq z_1$ donc $z_2 < z_1$ et donc (z_n) est décroissante. On a (z_n) croissante et $\alpha \leq z_n \leq z_1 < 1$. De plus (z_n) converge vers une solution de $f(\ell) = \ell$, on en déduit $\ell = \alpha$

Dans les deux cas on a bien : $\boxed{z_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha}$

Q12) $Z = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \{V_n = 0\}$ signifie qu'au moins un des événements $(V_n = 0)$ est réalisé (et par suite $\forall k \geq n \ , \ V_k$ est réalisé).

$\boxed{\text{L'événement } Z = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \{V_n = 0\} \text{ décrit donc la situation concrète ou aucun client ne vient après un certain client.}}$

Q13) On a $N_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
N_n est donc la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toute la même loi de Bernoulli de paramètre p.
N_n compte le nombre de succès (un client arrive) de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
On sait donc d'après le cours que : $\boxed{N_n \text{ suit une loi binomiale de paramètres } (n,p)}$

Q14) _En reprenant Q13) on a $V_1|S=N$ qui suit la même loi que N_n donc :

$$\boxed{\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \ , \ \mathbb{P}(V_1 = k|S=n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}}$$

• On a $V_1(\Omega) = \mathbb{N}$. Comme $(S=n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors par la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements :
$\forall k \in \mathbb{N} \ , \ \mathbb{P}(V_1 = k) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(V_1 = k|S=n)\mathbb{P}(S=n)$

Avec le début de la question et le fait que S suive une loi de Poisson de paramètre λ alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(V_1 = k) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(V_1 = k|S=n)P(S=n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} [\tbinom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k}][e^{-\lambda}\tfrac{\lambda^n}{n!}] \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \tfrac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \tfrac{\lambda^n}{n!} \\
&= \tfrac{e^{-\lambda}}{k!} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \tfrac{1}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \lambda^{n-k} \lambda^k \\
&= \tfrac{e^{-\lambda}}{k!} p^k \lambda^k \sum_{n=k}^{+\infty} \tfrac{1}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \lambda^{n-k} \text{ changement d'indice } N = n-k \\
&= \tfrac{e^{-\lambda}}{k!} p^k \lambda^k \sum_{N=0}^{+\infty} \tfrac{(\lambda(1-p))^N}{N!} \text{ on reconnaît } exp((1-p)\lambda) \\
&= \tfrac{e^{-\lambda}}{k!} p^k \lambda^k exp((1-p)\lambda) \\
&= e^{-p\lambda} \tfrac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

On a donc $\forall k \in \mathbb{N} \ , \ \mathbb{P}(V_1 = k) = e^{-p\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$

On reconnaît que : $\boxed{V_1 \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda p}$

Q15) Comme $(V_n = 0) \subset (V_{n+1} = 0)$ (en effet $V_n = 0 \Rightarrow V_{n+1} = 0$), alors $(V_n = 0)$ est une suite croissante d'événements et donc par le théorème de continuité croissante :
$\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (V_n = 0)) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_n = 0)$

On a donc : $\boxed{(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } \mathbb{P}(Z) = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n}$

Q16) • Si $j=0$ alors comme $V_1=0 \Rightarrow V_{n+1}=0$ on a $\mathbb{P}(V_{n+1}=0|V_1=0)=1=\mathbb{P}(V_n=0)^j$.

• Si $j>0$.
$V_{n+1}=0$ sachant $V_1=j$ signifie :
qu'il n'arrive pas de client pendant qu'est servi le premier client,
qu'il n'arrive pas de client pendant qu'est servi le deuxième client,
...
qu'il n'arrive pas de client pendant qu'est servi le j-ième client.
On remarque que ces événements sont indépendants et ont tous la même probabilité $\mathbb{P}(V_n=0)$ (on retrouve pour chaque client la situation ou il n'y a qu'un client au départ avec un rang de moins.)

On a donc : $\boxed{\mathbb{P}(V_{n+1}=0|V_1=j)=(\mathbb{P}(V_n=0)^j}$

Q17) Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(V_1=j)_{j\in\mathbb{N}}$ on a :
z_{n+1}
$=\mathbb{P}(V_{n+1}=0)$
$=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(V_{n+1}=0|V_1=j)\mathbb{P}(V_1=j)$
$=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}(\mathbb{P}(V_n=0)^j e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^j}{j!}$
$=e^{-\lambda p}\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda p\mathbb{P}(V_n=0))^j}{j!}=e^{-\lambda p}exp(\lambda p\mathbb{P}(V_n=0))=exp(\lambda p(z_n-1))$

On a bien : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ z_{n+1}=exp(\lambda p(z_n-1))}$

Q18) On reprend les résultats du II.1 avec $a=\lambda p$ et on obtient :

$a\leq 1 \Leftrightarrow \lambda p\leq 1\Rightarrow z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et on est alors certain qu'au bout d'un certain temps il n'y aura plus de client dans la file d'attente.

et
$a>1 \Leftrightarrow \lambda p>1\Rightarrow z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha\in]0,1[$, il y a alors une probabilité non nulle que la file d'attente soit définitivement vide mais on n'est pas certain de ce fait ! ! Il y a une probabilité non nulle que la file soit permanente.

Problème 2 : Centrale 2024 PSI, mathématiques 1

Q1) $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+1}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{cos^n(t)}_{\geq 0}\underbrace{(cos(t)-1)}_{\leq 0} dt$

Mais $cos^n(t)(cos(t)-t) \leq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $W_{n+1} - W_n \leq 0$ et donc $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$

Q2) $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+2}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+1}(t)cos(t)dt$

On fait une intégration par parties avec des fonctions dérivables :

$W_{n+2} = [cos^{n+1}(t)sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)sin(t)cos^n(t)sin(t)dt$

$\Rightarrow W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-cos^2(t))cos^n(t)dt = (n+1)(W_n - W_{n+2})$

On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}$

Q3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \omega_n = (n+1)W_nW_{n+1}$

Alors $\omega_{n+1} - \omega_n = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} - (n+1)W_nW_{n+1} = W_{n+1}\underbrace{((n+2)W_{n+2} - (n+1)W_n)}_{=0 \text{ avec Q2}}$

La suite (ω_n) est donc constante.

Mais $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t)dt = [sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Donc $\omega_0 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$

Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \omega_n = (n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}}$

Q4) (W_n) est décroissante donc : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$

On peut diviser par W_n qui est strictement positif : $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$

Avec la relation de Q2) : $\underbrace{\dfrac{n+1}{n+2}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ donc, par encadrements : $\lim\limits_{n\to+_infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ et donc $W_{n+1} \sim W_n$

On utilise cet équivalent dans la relation de Q3) : $(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow nW_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ et comme $W_n > 0$ alors :

$\boxed{W_n \underset{n=+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$

Q5) $t \mapsto exp(-t^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$. I ne pose donc problème qu'en $+\infty$

On a au voisinage de $+\infty$, par comparaison exponentielle-puissance : $exp(-t^2) = o(\frac{1}{t^2})$

puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{exp(-t^2)}{\frac{1}{t^2}} = \lim\limits_{t\to+\infty} t^2exp(-t^2) = 0$

Mais $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par Riemann, donc par négligeabilité $t \mapsto exp(-t^2)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

Comme il n'y a pas de problème sur $[0, 1]$, $t \mapsto exp(-t^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et par absolue convergence

$\boxed{I = \int_0^{+\infty} exp(-t^2)dt \text{ est convergente donc existe.}}$

Q6) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{array}{cccc} f_n & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t > \sqrt{n} \\ (1-\frac{t^2}{n})^n & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{n} \end{cases} \end{array}$

• Soit $t \in [0,+\infty[$. Alors, comme $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq N\ ,\ 0 \leq t \leq \sqrt{n}$ et donc $f_n(t) = (1-\frac{t^2}{n})^n = exp(nln(1-\frac{t^2}{n})) = exp(n(-\frac{t^2}{n}+o(\frac{1}{n}))) = exp(-t^2+o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} exp(-t^2)$

La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $\begin{array}{cccc} f & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & e^{-t^2} \end{array}$

• On pose : $\forall u \in [0,1[\ ,\ A(u) = ln(1-u)+u$
Alors A est C^1 sur $[0,1[$ et $A'(u) = \frac{-1}{1-u}+1 = \frac{-1+(1-u)}{1-u} = \frac{-u}{1-u} \leq 0$, donc A est décroissante sur $[0,1[$
Comme $A(0) = 0$ alors : $\forall u \in [0,1[\ ,\ A(u) \leq 0 \Leftrightarrow ln(1-u) \leq -u$

• Soit $t \in [0,\sqrt{n}[$:
$(1-\frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2}$ car ln est croissante
$\Leftrightarrow nln(1-\frac{t^2}{n}) \leq -t^2$
$\Leftrightarrow ln(1-\frac{t^2}{n}) \leq -\frac{t^2}{n}$
Cette dernière égalité est vraie car on applique : $ln(1-u) \leq -u$ avec $u = \frac{t^2}{n} \in [0,1[$
On en déduit $f_n(t) \leq e^{-t^2}$ sur $[0,\sqrt{n}[$.
Comme $f_n(t) = 0$ sur $[\sqrt{n},+\infty[$ alors on en déduit que $0 \leq f_n(t) \leq f(t)$ sur $[0,+\infty[$

• On a donc :
$$\begin{cases} \text{les } f_n \text{ sont continue par morceaux sur } [0,+\infty[\\ \text{la suite de fonction } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement vers } f \text{ qui est contiue par morceaux sur } [0,+\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall t \in [0,+\infty[\ ,\ |f_n(t)| \leq f(t) \text{ avec } f \text{ qui est intégrable sur } [0,+\infty[\end{cases}$$

On peur donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n})^n dt = I$$

En notant x au lieu de t, on a : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{x^2}{n})^n dx = I}$

Q7) $x \mapsto arcsin(\frac{x}{\sqrt{n}})$ est une bijection de classe C^1 de $]0,\sqrt{n}[$ dans $]0,\frac{\pi}{2}[$, on peut donc faire le changement de variable C^1 bijectif $x = \sqrt{n}sin(u)$ dans l'intégrale suivante :
$$\int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{x^2}{n})^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-sin^2(u))^n \sqrt{n}cos(u)du = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n+1}(u)du = \sqrt{n}W_{2n+1}$$

On a donc bien : $\boxed{\forall n \geq 1\ ,\ \int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{x^2}{n})^n dx = \sqrt{n}W_{2n+1}}$

Q8) • Avec Q4) et Q7) on a : $\int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{x^2}{n})^n dx \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Mais avec Q6) on a alors : $\boxed{I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

• Par partité on remarque que $J = 2I$ et donc $\boxed{J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}}$

Q9) Remarque : question mal posée, on parle de solution sur $\mathbb{R}$ et pas sur $\mathbb{R}[X]$ ..???!!!

• Supposons que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ait un rayon de convergence $R > 0$ et soit une solution de E sur $]-R;R[$

Comme on peut dériver une série entière terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence alors :

$$\forall x \in]-R;R[\ ,\ \begin{cases} y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases}$$

On a alors :

y solution de E sur $]-R;R[$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ ,\quad xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ ,\quad x\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ ,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$

$\Leftrightarrow (1)$

Changement d'indice : $p-1 = n+1 \Leftrightarrow p = n+2$ dans la dernière somme et $p = n$ dans les deux premières.

$(1) \Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ ,\ \sum_{p=0}^{+\infty} p(p-1)a_p x^{p-1} + \sum_{p=0}^{+\infty} p a_p x^{p-1} + \sum_{p=2}^{+\infty} a_{p-2} x^{p-1} = 0$

On fait commencer les sommes au même indice :

$$(1) \Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ ,\ 0 + 0 + \sum_{p=2}^{+\infty} p(p-1)a_p x^{p-1} + 0 + a_1 + \sum_{p=2}^{+\infty} p a_p x^{p-1} + \sum_{p=2}^{+\infty} a_{p-2} x^{p-1} = 0$$

On regroupe les sommes car elles convergent

$$(1) \Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ ,\ a_1 + \sum_{p=2}^{+\infty} [p(p-1)a_p + p a_p + a_{p-2}] x^{p-1} = 0$$

Par unicité du DSE_0, puisque $R > 0$

$(1) \Leftrightarrow a_1 = 0$ et $\forall p \geq 2\ \ p(p-1)a_p + p a_p + a_{p-2} = 0$

$\Leftrightarrow a_1 = 0$ et $\forall p \geq 2\ \ p^2 a_p + a_{p-2} = 0$

$\Leftrightarrow a_1 = 0$ et $\forall p \geq 2\ \ a_p = \frac{-1}{p^2} a_{p-2}$

Essayons de conjecturer le résultat :

$a_2 = \frac{-1}{2^2} a_0 \qquad a_4 = \frac{-1}{4^2} a_2 = \frac{1}{(2\times 4)^2} a_0$

$a_{2n} = \frac{-1}{(2n)^2} a_{2n-2} = \frac{-1}{[(2n)...(2n-2)...4\times 2]^2} a_0 = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} a_0$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} a_0 \end{cases}$

Au rang 0 : On a déjà montrer que $a_1 = 0$ et on a bien $a_0 = a_0$

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n et on la montre au rang $n+1$

$a_{2n+3} = \frac{-1}{(2n+3)^2}a_{2n+1} = \frac{-1}{(2n+3)^2} \times 0 = 0$

$a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \frac{-1}{(2n+2)^2}a_{2n} = \frac{-1}{4(n+1)^2}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}a_0 = \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}((n+1)!)^2}a_0$

On a donc bien le résultat au rang $n+1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}a_0 \end{cases}$

• On a donc $y(x) = a_0 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$

Par comparaison factorielle-puissance, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $R = +\infty$.

Comme, on a raisonné par équivalences et que $R > 0$ on sait que l'on peut remonter les équivalences.

Conclusion : Les solutions développables en séries entières en 0 de $(II.1)$, sont définies sur $\mathbb{R}$ et s'écrivent :

$\boxed{y(x) = a_0 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n} \text{ avec } a_0 \in \mathbb{R} \text{ et } R = +\infty}$

Q10) Si on impose de plus la condition $y(0) = 1$ alors $a_0 = 1$.
Donc il existe une unique solution de $(II.1)$, développable en série entière en 0 et définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant $S(0) = 1$, c'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \text{ , } S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}}$

Q11) • On pose : $\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}\times[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \longmapsto & \frac{1}{\pi}cos(xsin(t)) \end{array}$.
On remarque que g est C^∞ et que les intégrales de cette questions sont celles de fonctions continues sur un segment.
De plus $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{1}{\pi}sin(t)sin(xsin(t))$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{1}{\pi}sin^2(t)cos(xsin(t))$

• Alors :
i) $\forall t \in [0,\pi]$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur $[-A, A]$
ii) @ $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,\pi]$ (comme intégrale d'une fonction continue sur un segment)
@ $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,\pi]$ (comme intégrale d'une fonction continue sur un segment)
iii) $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$
iv) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\pi]$, $\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \frac{1}{\pi}$ avec $t \mapsto \frac{1}{\pi}$ qui est intégrable sur $[0,\pi]$

On peut donc appliquer la généralisation du théorème de dérivation pour une intégrale dépendant d'un paramètre et on en déduit : $\boxed{G : x \mapsto \int\limits_0^\pi g(x,t) \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Q12) La suite du théorème de Q11) donne :

$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ G'(x) = \frac{-1}{\pi}\int\limits_0^\pi sin(t)sin(xsin(t))dt$ et $G''(x) = \frac{-1}{\pi}\int\limits_0^\pi sin(t)^2cos(xsin(t))dt$

Si on intègre par partie $G'(x)$ avec des fonctions C^1 on a (en primitivant $t \mapsto sin(t)$) :

$G'(x) = \frac{-1}{\pi}[\underbrace{[-cos(t)sin(xsin(t))]_0^\pi}_{=0} - \int\limits_0^\pi(-cos(t))(xcos(t)cos(xsin(t)))dt]$

$= \frac{-x}{\pi}\int\limits_0^\pi \underbrace{(cos^2(t))}_{1-sin^2(t)} cos(xsin(t))dt$

$= \frac{-x}{\pi}\int\limits_0^\pi cos(xsin(t)dt + \frac{x}{\pi}\int\limits_0^\pi sin^2(t)cos(xsin(t)dt = -xG(X) - xG''(x)$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ xG''(x) + G'(x) + xG(x) = 0$ et $\boxed{G \text{ est solution de } (II.1) \text{ sur } \mathbb{R}}$

Q13) • Comme on sait que : $\forall X \in \mathbb{R}\ ,\ cos(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}X^{2k}$, alors :

$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \forall t \in [0,\pi]\ ,\ cos(xsin(t)) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(xsin(t))^{2k} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(sin(t))^{2k}x^{2k}$

Donc $G(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi[\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(sin(t))^{2k}x^{2k}]dt$

• Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $\forall k \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{cccc} h_k & [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longrightarrow & \frac{(-1)^k}{(2k)!}(sin(t))^{2k}x^{2k} \end{array}$

Alors les h_k sont continues sur $[0,\pi]$ et $\mathcal{N} h_k = \sup\limits_{t\in[0,\pi]} |h_k(t)| \leq \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Comme $\sum \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ est convergente, alors $\sum \mathcal{N} h_k$ est convergente, donc la série de fonctions $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} h_k$ converge normalement et donc uniformément sur $[0,\pi]$ (vers une fonction continue).

On peut donc, dans l'expression de $G(x)$, intervertir l'intégrale et le signe somme.

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ G(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}[\int\limits_0^\pi \frac{(-1)^k}{\pi(2k)!}(sin(t))^{2k}dt]x^{2k}$

• G est donc développable en série entière en 0, de rayon de convergence $+\infty$, G est solution de $(II.1)$ sur $\mathbb{R}$, $G(0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi 1dt = 1$, donc, avec la question Q10) on a : $\boxed{G = S}$

Q14) w est C^∞ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$w(x) = exp(-x^2)$

$w'(x) = -2xexp(-x^2)$

$w''(x) = -2exp(-x^2) + 4x^2exp(-x^2) = (4x^2-2)exp(-x^2)$

$w'''(x) = 8xexp(-x^2) - 2x(4x^2-2)exp(-x^2) = (-8x^3+12x)exp(-x^2)$

On en déduit : $\boxed{H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2-2 \text{ et } H_3(x) = 8x^3-12x}$

Q15) Toutes les fonctions sont C^∞ et on peut dériver : $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$

On obtient : $H_n'(x) = (-1)^n 2xe^{x^2}w^{(n)}(x) + (-1)^n e^{x^2} w^{(n+1)}(x)$

donc $H_n'(x) = 2x(-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x) - (-1)^{n+1} e^{x^2} w^{(n+1)}(x)$ qui donne $H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$

On a donc bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)}$

Q16) On va démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n est de degré n et est de la même parité que n (H_n est paire, si n est pair et H_n est impair, si n est impair)

Initialisation : $H_0 = 1$ et Q14) permettent d'initialiser la récurrence.

Hérédité : On suppose que H_n est de degré n et que $\forall x \in \mathbb{N}$, $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$
Avec Q15) : $H_{n+1}(x) = 2\underbrace{xH_n(x)}_{deg=n+1} - \underbrace{H_n'(x)}_{deg=n-1}$ donc $deg(H_{n+1}) = n+1$

$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \Rightarrow -H_n'(-x) = (-1)^n H_n'(x) \Rightarrow H_n'(x) = (-1)^{n+1} H_n'(x)$
Avec Q15) : $H_{n+1}(-x)$
$= 2(-x)H_n(-x) - H_n'(-x)$
$= -2x(-1)^n H_n(x) - (-1)^{n+1} H_n'(x) = (-1)^{n+1}[2xH_n(x) - H_n'(x)] = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x)$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } H_n \text{ est de degré } n \text{ et est de la même parité que } n}$

Q17) Par récurrence, comme en Q16), on démontrerait que : $\boxed{\text{le coefficient dominant de } H_n \text{ est } 2^n}$

Q18) • Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R})$.
@ Déjà E est non vide car la fonction nulle est dans E.
@ Soit $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $((f + \lambda g)(x))^2 = f(x)^2 + \lambda^2 g(x)^2 + 2\lambda f(x)g(x)$
Mais $|2f(x)g(x)| \leq f^2(x) + g^2(x)$ (on a utilisé : $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2$) donc
$|((f + \lambda g)(x))^2|\, e^{-x^2} \leq (1 + |\lambda|)e^{-x^2} f(x)^2 + (\lambda^2 + |\lambda|)e^{-x^2} g(x)^2$
Comme f et g sont dans E alors $x \mapsto (1 + |\lambda|)e^{-x^2} f(x)^2 + (\lambda^2 + |\lambda|)e^{-x^2} g(x)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et par comparaison $x \mapsto e^{-x^2}(f(x) + \lambda g(x))^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
On en déduit $f + \lambda g \in E$
@ E est non vide et stable par combinaison linéaire, donc E est sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R})$ et donc E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

• Si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors P est continue sur $\mathbb{R}$. De plus $e^{-x^2}P(x) = o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de $+\infty$, donc, par négligeabilité, comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ alors $x \mapsto e^{-x^2}P(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$
On fait de même sur $]-\infty, -1[$, il n'y a pas de problème sur $[-1, 1]$, donc $x \mapsto e^{-x^2}P(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc $P \in E$. On a donc $\mathbb{R}[X] \subset E$

• Conclusion : $\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R} \text{ espace vectoriel contenant } \mathbb{R}[X].}$

Q19) L'inégalité $|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(f^2(x) + g^2(x))$ permet de montrer (comme en Q18) que l'intégrale définissant $<,>$ est bien convergente.
On a alors : $\forall f, g, h \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
i) $< f, g >=< g, f >$ (évident)
ii) $< f, g + \lambda h >=< f, g > +\lambda < f, h >$ (par linéarité de l'intégrale)
iii) $< f, f >= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-x^2}(f(x))^2}_{\geq 0} dx \geq 0$
iv) $< f, f >= 0 \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(f(x))^2 dx = 0$
Mais $x \mapsto e^{-x^2}(f(x))^2$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2}(f(x))^2 = 0$ et donc $f = 0_E$

On a donc les quatre points qui permettent de démontrer que : $\boxed{<,> \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

Q20) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$< P, H_n > = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{x^2}(-1)^n w^{(n)}(x)e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)(-1)^n w^{(n)}(x)dx$$

On intègre par partie :

$$< P, H_n > = [(-1)^n w^{(n-1)}(x)P(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)(-1)^n w^{(n-1)}(x)dx$$

par comparaison exp-puissance le crochet est nul (ce qui justifie l'IPP), donc :

$$< P, H_n > = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)(-1)^{n-1}w^{(n-1)}(x)e^{x^2}e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}dx = < P', H_{n-1} >$$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall P \in \mathbb{R}[X] \ , \ < P, H_n > = < P', H_{n-1} >}$

Q21) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors, avec Q20), par itérations : :
$< P, H_n > = < P', H_{n-1} > = < P'', H_{n-2} > = \cdots = < P^{(k)}, H_{n-k} > = \cdots = < P^{(n)}, H_0 >$
Mais $P^{(n)} = 0_E$ car $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $< P, H_n > = 0$
On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \ , \ < P, H_n > = 0}$

Q22) $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une famille échelonnée en degré de $\mathbb{R}[X]$ donc elle est libre, de plus c'est une famille de $n+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+2$, donc $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $R_n[X]$.

De plus si $(i, j) \in [\![0; n]\!]$ avec $i < j$, alors $< H_i, H_j > = 0$ avec Q21).

Bilan : $\boxed{(H_0, H_1, \ldots, H_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X]}$

Q23) Si on reprend le calcul de Q21) avec $P = H_n$ alors $< H_n, H_n > = < H_n^{(n)}, H_0 >$
On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ ||H_n||^2 = < H_n^{(n)}, H_0 >}$

Q24) Mais comme H_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n alors $H_n^{(n)} = 2^n n!$ et donc $||H_n||^2 = < H_n, H_n > = 2^n n! < H_0, H_0 > = 2^n n! J$ et on connaît la valeur de J d'après Q8).

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ ||H_n|| = < H_n, H_n > = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$

Q25) • Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors, par linéarité de la dérivation :
$u(P+\lambda Q) = -(P+\lambda Q)'' + 2X(P+\lambda Q)' + (P+\lambda Q) = (-P'' + 2XP' + P) + \lambda(-Q'' + 2XQ' + Q) = u(P) + \lambda Q$
On a donc u linéaire, comme $u(P) \in \mathbb{R}[X]$ alors $\boxed{u \text{ est un en endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$

• Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $u(P) = \underbrace{-P''}_{deg \leq n-2} + \underbrace{2XP'}_{deg \leq n-1+1=n} + \underbrace{P}_{deg \leq n}$, donc $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

On a donc : $\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ stable par } u}$

Q26) Soit $P \in \mathbb{R}_[X]$.
$(v \circ w)(P) = v(P') = 2XP' - (P')' = -P'' + 2XP' = -P'' + 2XP' + P - P = u(P) - P = (u - Id)(P)$
Cette égalité étant vraie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on a : $\boxed{v \circ w = u - Id}$

$(w \circ v)(P) = w(2XP - P') = (2XP - P')' = 2P + 2XP' - P'' = P + P + 2XP' - P'' = P + u(P) = (Id + u)(P)$
Cette égalité étant vraie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on a : $\boxed{w \circ v = u + Id}$

Q27) De Q26) on déduit : $u = v \circ w + Id = w \circ v - Id$
Alors : $u \circ v - v \circ u = (v \circ w + Id) \circ v - v \circ (w \circ v - Id) = (v \circ w \circ v) + v - (v \circ w \circ v) + v = 2v$

Ona bien : $\boxed{u \circ v - v \circ u = 2v}$

Q28) Supposons que : $u(P) = \lambda P$
Alors, avec Q27) :
$u(v(P)) - v(u(P)) = 2v(P) \Rightarrow u(v(P)) - v(\lambda P) = 2v(P) \Rightarrow u(v(P)) - \lambda v(P) = 2v(P) \Rightarrow \boxed{u(v(P)) = (\lambda + 2)v(P)}$

Q29) On remarque que : $u(H_0) = -H_0'' + 2XH_0' + H_0 = H_0$, donc H_0 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1.
On remarque que : $v(H_k) = 2XH_k - H_k' = H_{k+1}$ avec la question Q15)
Donc avec Q28) : $u(v(H_0)) = (1+2)v(H_0)$ et donc $u(H_1) = 3H_1$, H_1 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 3.
Montrons par récurrence sur k que H_k est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $1 + 2k$.
On a déjà initialiser la récurrence en début de question.
Hérédité :
H_k est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $1 + 2k$
$\Rightarrow u(H_k) = (1 + 2k)H_k$, on utilise Q28)
$\Rightarrow u(v(H_k)) = (1 + 2k + 2)v(H_k)$ on utilise que $v(H_k) = H_{k+1}$
$\Rightarrow u(H_{k+1})) = (1 + 2(k + 1))H_{k+1}$

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ H_k \text{ est un vecteur propre de } u \text{ associé à la valeur propre } 1 + 2k}$

Q30) $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de u, donc de u_n et donc $\boxed{u_n \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}_n[X]}$

Q31) Soit $P, Q \in \mathbb{R}_[X]$
$< P', Q' >$
$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q'(t)[P'(t)e^{-t^2}]dt$ On intègre par partie en primitivant Q'
$= \underbrace{[Q(t)P'(t)e^{-t^2}]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t)[P''(t)e^{-t^2} - 2tP'(t)]dt$
$=< Q, -P'' + 2XP' >$
$=< Q, -P'' + 2XP' + P - P >$
$=< Q, u(P) > - < Q, P >$

On a donc bien : $\boxed{\forall P, Q \in \mathbb{R}_[X]\ ,\ < P', Q' >=< u(P), Q > - < P, Q >}$

Q32) Si on inverse les rôles de P et Q en Q31) on a : $< P', Q' >=< u(Q), P > - < P, Q >$, et en combinant les deux relations on a : $< u(P), Q >=< P, u(Q) >$.
Si P et Q sont dans $\mathbb{R}_n[X]$ on a donc $< u_n(P), Q >=< P, u_n(Q) >$ ce qui permet d'affirmer que : $\boxed{u_n \text{ est un endomorphisme autoadjoint de } \mathbb{R}_n[X].}$

Q33) D'après le cours, comme u_n est autoadjoint, sa matrice relativement à une base orthonormée pour le produit scalaire $<, >$ est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée pour le produit scalaire $<, >$.
Cette base sera alors formée de vecteurs propres de u_n.

Q34) On sait déjà que $(H_0,\dots,H_k,\dots,H_n)$ est une base orthogonale formée de vecteurs propres de u_n grâce à Q22) et Q29).
Avec Q24) on norme ces vecteurs et on a :
$\boxed{(\frac{H_0}{\sqrt{\sqrt{\pi}}},\dots,\frac{H_k}{\sqrt{2^k k!\sqrt{\pi}}},\dots,\frac{H_n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}) \text{ qui est une base orthonormales de } \mathbb{R}_n[X] \text{ formée de vecteurs propres de } u_n.}$

Q35) Remarque : Erreur d'énoncé, c'est f et pas ξ qui est dans E.

$\left|e^{-ix\xi}\right| = 1$ donc $\left|e^{-ix\xi}e^{-x^2}\right| = e^{-x^2}$ et donc, comme on sait que J est convergente, alors $x \mapsto e^{-ix\xi}$ est dans E.
Quand on a montrer que l'on avait un produit scalaire (en Q19), on a montrer que le produit de deux fonctions de E était dans E donc $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est dans E et donc $\boxed{x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$

Q36) • On a vu en Q18) que $\mathbb{R}[X] \subset E$ et donc : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ x \mapsto x^{2p}e^{-x^2} \text{ est intégable sur } \mathbb{R}.}$

• Soit $A > 0$:
$\int\limits_{-A}^{A} x^{2p}e^{-x^2}dx = [\frac{x^{2p+1}}{2p+1}e^{-x^2}]_{-A}^{A} - \int\limits_{-A}^{A} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}(-2xe^{-x^2})dx = [\frac{x^{2p+1}}{2p+1}e^{-x^2}]_{-A}^{A} + \frac{2}{2p+1}\int\limits_{-A}^{A} x^{2p+2}e^{-x^2})dx$
Donc, comme les intégrales convergent, quand $A \to +\infty$ on obtient :
$M_p = \frac{2}{2p+1}M_{p+1} \Rightarrow M_{p+1} = \frac{2p+1}{2}M_p$

D'après Q8) : $M_0 = J = \sqrt{\pi}$
Alors : $M_p = \frac{2p-1}{2}M_{p-1} = \frac{2p-1}{2}\frac{2p-3}{2}\dots\frac{1}{2}M_0 = \frac{(2p)!}{2^p}\frac{1}{2(p)(2(p-1))\dots(2.2)2}M_0 = \frac{(2p)!}{4^p p!}\sqrt{\pi}$

On a donc : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ M_p = \frac{(2p)!}{4^p p!}\sqrt{\pi}}$

Q37) Soit $\xi \in \mathbb{R}$ alors : $\mathscr{F}(f)(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}dx$

On développe $e^{-ix\xi}$ en série entière et on a : $\mathscr{F}(f)(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-ix\xi)^n}{n!}e^{-x^2}dx$

Finalement : $\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R}\ ,\ \mathscr{F}(f)(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(x)e^{-x^2}\frac{(-i)^n\xi^n x^n}{n!}dx}$

Q38) On fixe $\xi \in \mathbb{R}$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{cccc} \Phi_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & x & \longmapsto & \frac{(-ix\xi)^n}{n!}f(x)e^{-x^2}x^n \end{array}$

• Alors les fonctions ϕ_n sont continues par morceaux intégrables sur $\mathbb{R}$ (vu que E est stable par produit)

• $\sum \Phi_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}$ qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

• $\int\limits_{\mathbb{R}} |\Phi_n(x)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{(-ix\xi)^n}{n!}f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}\right|dx = \int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{(x\xi)^n}{n!}f(x)e^{-x^2}\right|dx = \frac{|\xi|^n}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|x^n f(x)e^{-x^2}\right|dx$

Notons $\ell : x \mapsto x^n$ alors : $\int\limits_{\mathbb{R}} |\Phi_n(x)|\,dx =< \ell, |f| >$
On utilise l'inégalité de Cauchy Schwarz et on en déduit : $\int\limits_{\mathbb{R}} |\Phi_n(x)|\,dx \le \frac{|\xi|^n}{n!}\,||f||\,||\ell||$

$||\ell||^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} x^{2n}e^{-x^2}dx = M_n$

Donc $\int\limits_{\mathbb{R}} |\Phi_n(x)|\,dx \le ||f||\,M_n = \frac{|\xi|^n}{n!}\,||f||\sqrt{\frac{(2n)!}{4^n(n)!}\sqrt{\pi}}$

On pose $\beta_n = \frac{|\xi|^n}{n!} ||f|| \sqrt{\frac{(2n)!}{4^n (n)!}\sqrt{\pi}}$

Alors $\left|\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right| = \frac{|\xi|}{n+1}\sqrt{\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!}\frac{4^n(n)!}{(2n)!}} = \frac{|\xi|}{n+1}\sqrt{\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)}} \sim \frac{|\xi|}{2(n+1)}\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc, par D'Alembert, comme $0 < 1$, $\sum \beta_n$ est convergente et par comparaison $\sum \int\limits_{\mathbb{R}} |\Phi_n(x)|\, dx$ est convergente.

• On peut donc utiliser le théorème d'intégration terme à terme et en déduire : $\int\limits_{\mathbb{R}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Phi_n(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \Phi_n(x)dx$

Conclusion : $\boxed{\mathscr{F} \text{ est développable en série entière sur } \mathbb{R} \text{ et } \mathscr{F}(\xi) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} [\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2}\frac{(-i)^n x^n}{n!}dx]\xi^n}$

Q39) $f \in (vect(H_n, n \in \mathbb{N}))^{\perp}$ donc $f \in (\mathbb{R}_n[X])^{\perp}$ car $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Comme $x \mapsto x^n \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $< f, x \mapsto x^n >= 0$ et donc $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)e^{-x^2}dx = 0}$

Q40) On utilise Q39) dans l'expression finale de Q38) et on obtient : $\boxed{\mathscr{F}(f) = 0_E}$

Q41) Comme $\mathscr{F}$ est injective (admis par l'énoncé) et que $\mathscr{F}(0_E) = 0_E$ alors $f = 0_E$

Finalement : $\boxed{(vect(H_n\ ,\ n \in \mathbb{N}))^{\perp} = \{0_E\} \text{ et donc } (H_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une famille totale de } E.}$