Pour le lundi 31 mars 2025

Devoir à la maison n°13 de Mathématiques

ccINP 2024, PSI : exercice : Equivalent de Stirling

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Pour tout $x > 0$, on note :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t .$$

Q20. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)! .$$

Q21. On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ converge et qu'elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.

Q22. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note $\rho_k = \ln k - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t \, \mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln \Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t \, \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k .$$

On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.

Q23. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2 \ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t)) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} - \ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) \mathrm{d}t .$$

Q24. En déduire que $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

Q25. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $n \to +\infty$:

$$\ln \Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln n - n + c + o(1) .$$

En déduire que lorsque $n \to +\infty$:

$$\Gamma(n) \sim e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} .$$

Q26. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note :

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t .$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \mathrm{d}u .$$

Q27. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x > 0, \quad \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} .$$

Q28. On définit la fonction $\mathbf{1}_{]0,n[}$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant $\mathbf{1}_{]0,n[}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]0, n[, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

En remarquant que $\Gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{]0,n[}(t)\, t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$, utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$

En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} .$$

Q29. Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n) n^x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

En déduire que $e^c = \sqrt{2\pi}$ où c est défini à la question **Q25**.

*On pourra faire appel aux résultats des questions **Q19** et **Q20**.*

ccINP 2018, PSI : Problème 2

Notations et définitions

- **N** désigne l'ensemble des entiers naturels, **R** désigne celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée ($\mathbf{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge presque-sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q31. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée*.

Q32. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

Q33. En déduire que pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbf{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\alpha}.$$

Q34. Montrer que pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbf{P}\left(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}\right) \leq \frac{\left(\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)\right)^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)$

Q35. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur **R** et que la fonction g_a' est décroissante sur **R**. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

Q36. En déduire que pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in [-1, 1]$ on a :

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$

Q37. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leq \operatorname{ch}(t).$$

Q38. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q39. Montrer que la fonction

$$t \in \mathbf{R} \mapsto e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$$

atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q40. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$, puis que :

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Conclusion

Q41. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q42. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega \,;\, |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, B_n est un événement et que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n\right) = 0.$$

Q43. Posons, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega \,;\, \exists n \in \mathbf{N}^*,\ \forall m \geq n,\ |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right\}.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, Ω_k est un événement.
Écrire l'ensemble $A = \left\{\omega \in \Omega \,;\, \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0\right\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbf{N}^*$.
En déduire que A est un événement.

Q44. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbf{P}(A) = 1.$$