PSI* 2024-2025, Mathématiques DS n°7

Correction : Math 1, centrale PSI , 2022

Q1) QUESTION DE COURS

• $\forall A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall B = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
$A + \lambda B = (a_{i,j} + \lambda b_{i,j})$ donc $tr(A + \lambda B) = \sum\limits_{i=1}^{n}(a_{i,i} + \lambda b_{i,i}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} + \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i,i} = tr(A) + \lambda tr(B)$ donc tr est linéaire. De plus, tr est à valeur dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{tr \text{ est donc une forme linéaire.}}$

• Avec les notations précédentes, on pose $C = AB = (c_{i,j})$. On a : $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$
$tr(C) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}$ Cette formule est symétrique en A et B, donc $tr(AB) = tr(BA)$

$\boxed{\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})\ ,\ tr(AB) = tr(BA)}$

Q2) QUESTION DE COURS
Comme ci-dessus, on montre que : $tr(A^T B) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{i,k}$ et on reconnaît le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$

$\boxed{(A, B) \mapsto tr(A^T B) \text{ est donc un produit scalaire sur } M_n(\mathbb{R})}$

Q3) D'après Q2), la forme bilinéaire $(A, B) \mapsto tr(A^T B)$ est un produit scalaire, elle est donc définie et donc :
$\boxed{tr(A^T A) = 0 \Rightarrow A = 0_n}$

Q4) Soit λ une valeur propre (réelle ou complexe) de A une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{R})$ d'ordre $k \geq 1$ (autrement dit $A^k = 0_n$). Alors $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.
On a alors$A^k X = \lambda^k X \Rightarrow \lambda^k X = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ puisque X est non nul (vecteur propre).
Donc $sp(A) \subset \{0\}$
De plus $det(A^k) = 0 \Rightarrow det(A)^k = 0 \Rightarrow det(A) = 0$ et donc $0 \in sp(A)$
On en déduit $sp(A) = \{0\}$

$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, alors 0 est valeur propre de } A \text{ est c'est la seule valeur propre complexe de } A.}$

Q5) Comme toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et comme $sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$, A est semblable a une matrice triangulaire supérieure avec une diagonale de 0. Le déterminant et la trace d'une telle matrice sont nuls. Comme deux matrices semblables ont même trace et même déterminant on en déduit : $\boxed{A \in N_n \Rightarrow tr(A) = 0 \text{ et } det(A) = 0}$

Q6) Soit $M \in N_n$ alors $\exists k \geq 1$ tel que $M^k = 0_n$.
Mais $M^{2k} = (M^2)^k = M^k M^k = 0_n$ et $2k \geq 1$ donc M^2 est aussi nilpotente.

$\boxed{M \in N_n \Rightarrow M^2 \in N_n}$

Q7) $M, N \in N_n \Rightarrow \exists k \geq 1$ et $\exists k' \geq 1$ tel que $M^k = 0$ et $N^{k'} = 0$.
Alors $(MN)^k = M^k N^k$ puisque M et N commutent ($MN = NM$), mais comme $M^k = 0$ alors $(MN)^k = 0$ et donc MN est niloptente.

Posons $K = k + k'$.
Comme M et N commutent on a par la formule du binôme de Newton : $(M+N)^K = \sum_{i=0}^{K} \binom{k}{i} M^i N^{K-i}$

Si $i \leq k$ alors $K - i \geq k'$ donc $N^{K-i} = 0$ et donc $M^i N^{K-i} = 0$
Si $i \geq k$ alors $M^i = 0$ et donc $M^i N^{K-i} = 0$

Finalement $M + N = 0$ puisque l'on a une combinaison linéaire de matrices nulles, et $K \geq 1$ donc $M + N$ est nilpotente.

Bilan : $\boxed{\text{Si } M \text{ et } N \text{ sont nilpotentes et commutent, alors } MN \text{ et } M+N \text{ sont nilpotentes.}}$

Q8) $(M+N)^2 - M^2 - N^2 = MN + NM$
Comme M, N et $M+N$ sont nilpotentes, alors d'après Q6), $(M+N)^2$, N^2 et M^2 sont aussi nilpotentes et leur trace est nulle d'après Q5).
En prenant la trace dans la relation ci-dessus on obtient : $tr(MN) + tr(NM) = 0$ et comme $tr(MN) = tr(NM)$ alors $tr(MN) = 0$ (on a utilisé Q1))

Bilan : $\boxed{M,\ N,\ M+N \text{ nilpotentes} \Rightarrow tr(MN) = 0}$

Q9) D'après Q5) on a déjà $M \in N_2 \Rightarrow det(M) = tr(M) = 0$

Réciproquement, soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $det(M) = tr(M) = 0$
Alors, par Hamilton-Cayley : $M^2 - tr(M)M + det(M)I_2 = 0_2 \Rightarrow M^2 = 0 \Rightarrow M$ est nilpotente

On a donc $\boxed{M \in M_2(\mathbb{R}) \text{ nilpotente} \Leftrightarrow tr(M) = det(M) = 0}$

Q10) Soit A symétrique réelle et nilpotente. Alors $sp(A) \subset \{0\}$ car A est nilpotente et A est diagonalisable car symétrique réelle. On a alors A semblable à la matrice nulle et donc $A = 0$.

$\boxed{\text{La seule matrice symétrique réelle nilpotente est la matrice nulle.}}$

Q11) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et nilpotente.
$A^T A = (-A)A = -A^2 = A(-A) = AA^T$ donc A et A^T commutent. Comme A et A^T commutent et sont nilpotentes, alors avec Q7) $A^T A$ est niloptente.
$(A^T A)^T = (A^T)(A^T)^T = A^T A$ donc $A^T A$ est symétrique.
En utilisant Q10) avec $A^T A$ qui est symétrique et nilpotente, alors $A^T A$ est nulle et donc avec Q3), A est nulle.

$\boxed{A \text{ antisymétrique réelle et nilpotente} \Rightarrow A = 0}$

Q12) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{2k+1} = A \neq 0$ et donc A n'est pas nilpotente, alors que $det(A) = tr(A) = 0$

Q13) Cherchons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $E_i = a(V - 2E_i) + bV$, alors en regardant la coordonnée i et les autres séparément : $\begin{cases} 1 = a - 2a + b \\ 0 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

On a donc la relation (qui peut se trouver directement) : $\boxed{E_i = \frac{-1}{2}(V - 2E_i) + \frac{1}{2}V}$

On remarque que V et $V - 2E_i \in V_{n,1}$ donc $E_i \in Vect(V_{n,1})$ on a donc $Vect(E_1, \dots, E_n) \subset Vect(V_{n,1})$
Comme $(E_1, \dots, E_n)$ est la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ alors : $\boxed{Vect(V_{n,1}) = M_{n,1}(\mathbb{R})}$

Q14) Posons $j = Max(\{k \in [\![1;n]\!]\ ,\ (C_1, \dots, C_k) \text{ libre } \})$
Alors j existe et $j \geq 1$ car c'est le max d'une partie de $\mathbb{N}$ non vide (en effet (C_1) libre car $C_1 \neq 0$, donc $j \geq 1$) et majorée par n.
On a $j \leq n-1$ car $j = n$ donnerai $(C_1, \dots, C_n)$ libre ce qui n'est pas le cas puisque la famille est liée.

Par définition de j : $(C_1, \dots, C_j, C_{j+1})$ est liée, donc
$\exists (a_1, \dots, a_j, a_{j+1}) \neq (0, \dots, 0, 0)$ tel que : $\sum\limits_{i=1}^{j} a_i C_i + a_{j+1} C_{j+1} = 0$

Si $a_{j+1} = 0$ alors $\sum\limits_{i=1}^{j} a_i C_i = 0$ et donc $a_1 = \dots = a_j = 0$ car $(C_1, \dots, C_j)$ libre. Impossible
Donc $a_{j+1} \neq 0$ et $C_{j+1} = \sum\limits_{i=1}^{j} \frac{-a_i}{a_{j+1}} C_i \in Vect(C_1, \dots, C_j)$

Si $j' < j$ alors $(C_1, \dots, C_{j'+1})$ est libre donc j' ne convient pas.
Si $j' > j$ alors $(C_1, \dots, C_{j'})$ est liée donc j' ne convient pas.
On a donc j unique.

On a donc $\boxed{\text{Il existe un unique } j \text{ telle que } (C_1, \dots, C_j) \text{ libre et } C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)}$

Q15) Considérons la matrice $\tilde{U}$ dont les colonnes sont les vecteurs $U_1 \dots U_d$
Alors comme la famille $(U_1, \dots, U_d)$ est libre, cette matrice est de rang d.
Il existe donc d lignes de $\tilde{U}$, notée $(L_{i_1}, \dots, L_{i_d})$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$ telle que $(L_{i_1}, \dots, L_{i_d})$ soit libre.

Considérons : $\begin{array}{ccccc} \Phi & : & H & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ & & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (x_{i_1}, \dots, x_{i_d}) \end{array}$ qui est de manière évidente une application linéaire de H dans $\mathbb{R}^d$.
Considérons M_Φ la matrice de Φ relativement à la base $(U_1, \dots, U_d)$ de H et à la base canonique de $\mathbb{R}^d$.
Alors on a : $M_\Phi = \begin{pmatrix} L_{i_1} \\ \vdots \\ L_{i_d} \end{pmatrix}$ qui est de rang d par construction.

Φ est une application linéaire, de rang d, entre deux espaces vectoriels de dimention d : c'est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$ espace vectoriel et donc $\boxed{\Phi \text{ est bijective}}$.

Q16) Par Q15), on voit qu'un vecteur de W est déterminé par d de ses coordonnées.
W est en bijection avec $M_{d,1}(\mathbb{R})$ et $card(M_{d,1}(\mathbb{R}) \cap V_{d,1}(\mathbb{R})) = 2^d$ (1 ou -1 pour les coordonnées x_{i_k})

Donc $\boxed{card(W \cap V_{d,1}(\mathbb{R})) \leq 2^d}$

Q17) Soit $X \hookrightarrow R$. On pose $Y = \frac{X+1}{2}$, alors $Y(\Omega) = \{0;1\}$ avec $P(Y=0) = P(X=-1) = \frac{1}{2}$ et $P(Y=1) = P(X=1) = \frac{1}{2}$ On reconnaît une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Donc $\boxed{X \hookrightarrow R \Rightarrow \frac{1}{2}(X+1) \hookrightarrow B(\frac{1}{2})}$

Q18) Soit $X \hookrightarrow R$. X admet une variance et une espérance car $X(\Omega)$ est fini.

$\mathbb{E}(X) = -1\mathbb{P}(X=-1) + 1\mathbb{P}(X=1) = 0$
$X^2 = 1$ donc $\mathbb{E}(X^2) = 1$ et $\mathbb{V}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - 0 = 1$

On a donc $\boxed{X \hookrightarrow R \Rightarrow \mathbb{E}(X) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(X) = 1}$

Q19) Directement $XY(\Omega) = \{-1;1\}$
$(XY=1) = (X=1 \cap Y=1) \cup (X=-1 \cap Y=-1)$
On a une union de deux événements incompatibles donc $\mathbb{P}(XY=1) = \mathbb{P}(X=1 \cap Y=1) + \mathbb{P}(X=-1 \cap Y=-1)$
Mais X et Y sont indépendantes donc : $\mathbb{P}(XY=1) = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=-1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
De même $\mathbb{P}(XY=-1) = \frac{1}{2}$ et donc $XY \hookrightarrow R$ Donc : $\boxed{X \hookrightarrow R \text{ et } Y \hookrightarrow R \Rightarrow XY \hookrightarrow R}$

Q20) $\tau_n = tr(M_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{i,i}$
Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(\tau_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(m_{i,i}) = \sum\limits_{k=1}^{n} 0 = 0$
Comme les $m_{i,j}$ sont mutuellement indépendants : $\mathbb{V}(\tau_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(m_{i,i}) = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$

On a donc $\boxed{\mathbb{E}(\tau_n) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(\tau_n) = n}$

Q21) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\mathbb{E}(\delta_n) = 0$

Initialisation : Si $n = 1$ on a $\delta_1 = m_{1,1}$ donc $\mathbb{E}(\delta_1) = \mathbb{E}(m_{1,1}) = 0$ (car $m_{1,1} \hookrightarrow R$)).

Hérédité : Soit $n \geq 2$. On suppose le résultat vraie au rang $n-1$.
Alors, en développant par rapport à la première ligne :
$\delta_n = det(M_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{1,j} det(M'_{i,j})$ où $M'_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la première ligne de M_n et la j-ième colonne.
Comme les $m_{i,j}$ sont mutuellement indépendantes. Alors, avec le lemme des coalitions :
$\mathbb{E}(\delta_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \mathbb{E}(m_{1,j}) \mathbb{E}(det(M'_{i,j}))$ et comme $\mathbb{E}(m_{i,j}) = 0$ (hypothèse de récurrence au rang $n-1$) alors on a : $\mathbb{E}(\delta_n) = 0$.

Conclusion : on a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \mathbb{E}(\delta_n) = 0}$

Q22) Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que $\mathbb{V}(\delta_n) = n!$

Pour $n = 1$ on a déjà démontré le résultat à la question Q18).

Supposons le résultat est vraie au rang $n-1$.
On a : $\delta_n = det(M_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{1,j} det(M'_{i,j})$
Par le lemme des coalitions les $(m_{1,j} det(M'_{i,j}))$ sont indépendantes et donc : $\mathbb{V}(\delta_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{V}(m_{1,j} det(M'_{i,j}))$

Mais $\mathbb{V}(m_{1,j} det(M'_{i,j})) = \mathbb{E}((m_{1,j} det(M'_{i,j}))^2) - \mathbb{E}((m_{1,j} det(M'_{i,j})))^2$
Par indépendance mutuelle :
$\mathbb{V}(m_{1,j} det(M'_{i,j})) = \mathbb{E}(m_{1,j}^2)\mathbb{E}(det(M'_{i,j})^2) - \mathbb{E}((m_{1,j})\mathbb{E}(det(M'_{i,j}))$
Or $\mathbb{E}(m_{1,j}^2) = 1$ et $\mathbb{E}((m_{1,j}) = 0$ donc
$\mathbb{V}(m_{1,j} det(M'_{i,j})) = \mathbb{E}(det(M'_{i,j})^2) = \mathbb{V}(det(M'_{i,j})^2) + \mathbb{E}(det(M'_{i,j}))^2 = \mathbb{V}(\delta_{n-1}) + \mathbb{E}(\delta_{n-1})^2 = \mathbb{V}(\delta_{n-1})$
Mais $\mathbb{V}(\delta_{n-1}) = (n-1)!$ par hypothèse de récurrence au rang $n-1$.
On a donc : $\mathbb{V}(\delta_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} (n-1)! = n(n-1)! = n!$

Conclusion : on a montrer par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \mathbb{V}(\delta_n) = n!}$

Q23) D'après Q9) : $M_2 \in N_2 \Leftrightarrow det(M_2) = tr(M_2) = 0$
Donc $M_2 \in N_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m_{11} + m_{22} = 0 \\ m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_{22} = -m_{11} \\ -m_{11}^2 - m_{12}m_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_{22} = -m_{11} \\ m_{12}m_{21} = -1 \end{cases}$
Alors : $(M_2 \in N_2)$ est l'union disjointe des événements : $(m_{11} = 1 \cap m_{22} = -1 \cap m_{12} = 1 \cap m_{21} = -1)$, $(m_{11} = 1 \cap m_{22} = -1 \cap m_{12} = -1 \cap m_{21} = 1)$, $(m_{11} = 1 \cap m_{22} = 1 \cap m_{12} = -1 \cap m_{21} = -1)$
et $(m_{11} = -1 \cap m_{22} = 1 \cap m_{12} = -1 \cap m_{21} = 1)$ qui correspondent aux matrices M_2 suivantes :
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Par incompatibilités et indépendances, on a : $\boxed{\mathbb{P}(M_2 \in \mathbb{N}_2) = 4 \times (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{4}}$

Q24) $M_2 \notin Gl_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow det(M_2) = 0 \Leftrightarrow m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 0 \Leftrightarrow m_{11}m_{22} = m_{12}m_{21}$
Mais $X = m_{11}m_{22}$ et $Y = m_{12}m_{21}$ sont indépendantes et suivent la loi R d'après Q19).
Donc $(M_2 \notin Gl_2(\mathbb{R})) = [(X = 1 \cap Y = 1) \cup (X = -1 \cap Y = -1)]$
Par incompatibilité et indépendances : $\mathbb{P}(M_2 \notin Gl_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Mais $\mathbb{P}(M_2 \in Gl_2(\mathbb{R})) = 1 - \mathbb{P}(M_2 \notin Gl_2(\mathbb{R})) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et donc $\boxed{\mathbb{P}(M_2 \in Gl_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}}$

25) $\mathbb{P}((c_1 = \epsilon_1) \cap \cdots \cap (c_n = \epsilon_n)) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}((c_k = \epsilon_k))$ par indépendance mutuelle et comme pour tout k : $\mathbb{P}((c_k = \epsilon_k)) = \frac{1}{2}$ on obtient : $\boxed{\mathbb{P}((c_1 = \epsilon_1) \cap \cdots \cap (c_n = \epsilon_n)) = \frac{1}{2^n}}$

26) Comme $C(\omega') \neq 0$ alors :
$(C(\omega), C(\omega'))$ liée
$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \ , \ C(\omega) = \lambda C(\omega')$
$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \forall i \in [\![1; n]\!] \ , \ c_i = \lambda c'_i$ on multiplie par c'_i et on utilise $(c'_i)^2 = 1$
$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \forall i \in [\![1; n]\!] \ , \ c'_i c_i = \lambda$
$\Rightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ (car λ est constant et ne peut prendre qu'une de ces 2 valeurs)
En posant $\lambda = \epsilon$, on a donc $(C(\omega), C(\omega'))$ liée $\Rightarrow \exists \epsilon \in \{-1; 1\}$ tel que $C(\omega) = \lambda C(\omega')$
La réciproque est évidente, donc : $\boxed{(C(\omega), C(\omega')) \text{ liée} \Leftrightarrow \exists \epsilon \in \{-1; 1\} \text{ tel que } C(\omega) = \lambda C(\omega')}$

27) D'après Q26), $(C(\omega), C(\omega'))$ liée $\Leftrightarrow (\forall i \in [\![1;n]\!]\ ,\ c_ic'_i = 1)$ ou $(\forall i \in [\![1;n]\!]\ ,\ c_ic'_i = -1)$

On a la réunion de deux événements incompatibles, et comme les $c_ic'_i \hookrightarrow R$ alors :

$\mathbb{P}((C(\omega), C(\omega'))$ liée $) = \mathbb{P}(c_1c'_1 = 1 \cap \dots c_nc'_n = 1) + \mathbb{P}(c_1c'_1 = -1 \cap \dots c_nc'_n = -1) = 2 \times \frac{1}{2^n}$ par Q25)

Donc $\boxed{\mathbb{P}((C(\omega), C(\omega')) \text{ liée }) = \frac{1}{2^{n-1}}}$

28) • Si $(C_1, \dots, C_n)$ est libre alors R_n, est vérifié.
• Si $(C_1, \dots, C_n)$ n'est pas libre (donc liée) , alors, comme C_1 est non nulle on peut appliquer la question Q14) et il existe un unique $j \in [\![1;n-1]\!]$ tel que l'on est R_j.
Les R_j sont clairement incompatibles 2 à 2 et leur union donne Ω, on a bien :
$\boxed{(R_1, \dots, R_n), \text{ est un système complet d'événements.}}$

29) En utilisant le système complet d'événements du 28) :
$\mathbb{P}(M \notin GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(\overline{R_n}) = \mathbb{P}(R_1 \cup \dots \cup R_{n-1}) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(R_j)$
Mais $R_j = [(C_1, \dots, C_j)$ libre et $C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)] \subset [C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)]$ (car $A \cap B \subset B$)

Par croissance de la probabilité on a : $\mathbb{P}(R_j) \leq \mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j))$ et donc, en reportant ci-dessus : $\boxed{\mathbb{P}(M \notin GL_n(\mathbb{R})) \leq \sum\limits_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j))}$

30) $(C_1 = V_1 \cap \dots \cap C_j = V_j)_{(V_1,\dots,V_j) \in V_{n,1}^j}$ est un système complet d'événements.

Par la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements :

$$\mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)) = \sum_{(V_1,\dots,V_j) \in V_{n,1}^j} \mathbb{P}((C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)) \cap (C_1 = V_1 \cap \dots \cap C_j = V_j))$$

Et par le lemme des coalitions et indépendances mutuelle :

$$\boxed{\mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)) = \sum_{(V_1,\dots,V_j) \in V_{n,1}^j} \mathbb{P}((C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)))\mathbb{P}((C_1 = V_1 \cap \dots \cap C_j = V_j))}$$

31) Soit $j \in [\![1;n-1]\!]$. Pour $(v_1, \dots, v_j) \in V_{n,1}^j$ on a $dim(vect(v_1, \dots, v_j)) \leq j$
Donc, par Q16) : $card(Vect(v_1, \dots, v_j) \cap V_{n,1}) \leq 2^j$

D'après Q25), $\forall v \in V_{n,1}\ ,\ \mathbb{P}(C_{j+1} = v) = \frac{1}{2^n}$ donc :
$\mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(v_1, \dots, v_j))$
$= \mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(v_1, \dots, v_j) \cap V_{n,1}) \leq card(Vect(v_1, \dots, v_j) \cap V_{n,1}) \frac{1}{2^n} = 2^j \frac{1}{2^n} = 2^{j-n}$

D'après Q30) : $\mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)) \leq \sum\limits_{(V_1,\dots,V_j) \in V_{n,1}^j} 2^{j-n}\mathbb{P}((C_1 = V_1 \cap \dots \cap C_j = V_j))$
Donc $\mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)) \leq 2^{j-n} \sum\limits_{(V_1,\dots,V_j) \in V_{n,1}^j} \mathbb{P}((C_1 = V_1 \cap \dots \cap C_j = V_j)) = 2^{j-n}$
car $\sum\limits_{(V_1,\dots,V_j) \in V_{n,1}^j} \mathbb{P}((C_1 = V_1 \cap \dots \cap C_j = V_j)) = 1$ puisque $[(V_1, \dots, V_j) \in V_{n,1}^j]$ est un système complet d'événements. On a donc finalement : $\boxed{\forall j \in [\![1;n-1]\!]\ ,\ \mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)) \leq 2^{j-n}}$

32) Q29) et Q31) donnent : $\mathbb{P}(M \notin GL_n(\mathbb{R})) \leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-n} = 2^{1-n}\frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 2^{1-n}(2^{n-1}-1) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Et comme $\boxed{\mathbb{P}(M \in GL_n(\mathbb{R})) = 1 - \mathbb{P}(M \notin GL_n(\mathbb{R})) \text{ alors } \mathbb{P}(M \in GL_n(\mathbb{R})) \geq \frac{1}{2^{n-1}}}$

---

33) 34) 35)

```
def modifie_matrice(p,A):
    n=A.shape(1)
        for i in range(n):
        for j in range(n):
            if A[i][j]==1 and rd.binomiale(1,p)==1:
                A[i][j]:=-1
    return A

def nb_tours(p,n):
    A=np.ones((n,n))
    nbt=0
    while A.sum()<n*n:
        nbt+=1
        A=modifie_matrice(p,A)
    return nbt

def  moyenne_tours(p,n,nbe)
    m=0
    for i in range(nbe):
        m=m+nb_tours(p,n)
    return m/nbe
```

36) Par Cauchy-Schwarz on a : $|< u_i|u_j >| \leq ||u_i||\,||u_j||$ et comme u_i et u_j sont unitaires alors : $|< u_i|u_j >| \leq 1$

$C(u)$ est donc le sup d'une partie non vide (car I possède au mins deux éléments) de $\mathbb{R}$ incluse dans $[0;1]$, donc $\boxed{C(u) \text{ existe et appartient à } [0;1]}$

37) Si $C(u) = 0$ alors $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow (u_i|u_j) = 0$ et donc (u_i) est une famille orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, donc libre, donc finie et $card(\{u_i, i \in I\}) \leq dim(M_{n,1}(\mathbb{R})) = n$.

Donc $\boxed{C(u) = 0 \Rightarrow \{u_i, i \in I\} \text{ est finie et } card(\{u_i, i \in I\}) \leq n}$

38) Utilisons les DSE_0 valables sur $\mathbb{R}$ de ch et de $t \mapsto exp(\frac{t^2}{2})$

$exp(\frac{t^2}{2}) - ch(t) = [\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^n}{n!}] - [\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}] = \sum_{n=0}^{+\infty} [\frac{1}{2^n n!} - \frac{1}{(2n)!}] t^{2n}$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n n! \leq (2n)!$

Vraie au rang 0 et au rang 1 car $1 \leq 1$ et $2 \leq 2$

Si l'hypothèse est vraie au rang n alors : $2^n n! \leq (2n)!$
Comme $1 \leq 2n+1$, en multipliant les deux inégalités (termes positifs) : $2^n n! \leq (2n+1)(2n)!$ on multiplie par $2n+2 = 2(n+1)$ et on obtient : $2.2^n(n+1)n! \leq (2n+2)(2n+1)(2n)! \Rightarrow 2^{n+1}(n+1)! \leq (2n+2)!$
Mais : $\frac{1}{2^n n!} - \frac{1}{(2n)!} \geq 0 \Leftrightarrow 2^n n! \leq (2n)!$ donc $exp(\frac{t^2}{2}) - ch(t)$ est la somme de termes positifs et donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \ , \ ch(t) \leq exp(\frac{t^2}{2})}$

39) $exp(t < X|Y >) = exp(\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n} X_iY_i)) = \prod_{i=1}^{n} exp(\frac{t}{n}X_iY_i)$

Comme les variables aléatoires en questions sont indépendantes (théorème des coalitions) :
$\mathbb{E}(exp(t < X|Y >)) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(exp(\frac{t}{n}X_iY_i))$

Comme $X_iY_i \hookrightarrow R$ alors $\mathbb{E}(exp(\frac{t}{n}X_iY_i)) = \frac{1}{2}exp(\frac{t}{n}) + \frac{1}{2}exp(-\frac{t}{n}) = ch(\frac{t}{n})$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(exp(t < X|Y >)) = (ch(\frac{t}{n}))^n}$

40) On utilise Q38) dans Q39) : $\mathbb{E}(exp(t < X|Y >)) \leq (exp(\frac{(\frac{t}{n})^2}{2}))^n = (exp(\frac{t^2}{2n^2}))^n = exp(\frac{t^2}{2n})$

On a donc $\boxed{\mathbb{E}(exp(t < X|Y >)) \leq exp(\frac{t^2}{2n})}$

41) En appliquant Markov à la variable aléatoire $exp(tZ)$ on a : $exp(t\lambda)\mathbb{P}\Big(exp(tZ) \geq exp(t\lambda)\Big) \leq \mathbb{E}(exp(tZ))$

Comme $t \geq 0$ on a bien $\mathbb{P}\Big(exp(tZ) \geq exp(t\lambda)\Big) = \mathbb{P}\big(Z \geq \lambda\big)$ et alors :

$exp(t\lambda)\mathbb{P}\Big(Z \geq \lambda\Big) \leq \mathbb{E}(exp(tZ)) \leq exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2})$ (hypothèse de l'énoncé pour la dernière inégalité)

et donc $\boxed{\mathbb{P}\Big(Z \geq \lambda\Big) \leq exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t)}$

42) Posons $\forall t \geq 0 \ , \ a(t) = \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t$ Alors a est dérivale et $a'(t) = \sigma^2 t - \lambda$
On a le tableau de variation suivant (puisque $\sigma > 0$ et $\lambda > 0$) :

t	0		$\frac{\lambda}{\sigma^2}$		$+\infty$
$a'(t)$		-	+	+	
$a(t)$	0	$\searrow$	A	$\nearrow$	$+\infty$

avec $A = a(\frac{\lambda}{\sigma^2}) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\lambda^2}{\sigma^4} - \lambda\frac{\lambda}{\sigma^2} = \frac{-\lambda^2}{2\sigma^2}$

Comme l'inégalité de 41) est vraie en particulier pour $t = \frac{\lambda}{\sigma^2}$ alors on a (puisque exp est croissante) :

$\mathbb{P}(Z \geq \lambda) \leq exp(\frac{-\lambda^2}{2\sigma^2})$

On reprend le même raisonnement que ci-dessus en remplaçant Z par $-Z$ et t par $-t$ (on a alors $tZ = (-t)(-Z)$) pour montrer que $\mathbb{P}(Z \leq -\lambda) \leq exp(\frac{-\lambda^2}{2\sigma^2})$

Alors : $\mathbb{P}(|Z| \geq \lambda) = \mathbb{P}(Z \geq \lambda) + \mathbb{P}(Z \leq \lambda)$ et avec les deux résultats ci-dessus : $\boxed{\mathbb{P}(|Z| \geq \lambda) \leq 2exp(\frac{-\lambda^2}{2\sigma^2})}$

Q43) On peut applique Q42) avec $Z =< X, Y >$, $\lambda = \varepsilon$ et $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}}$ puisque le résultat de Q40) permet de vérifier l'hypothèse voulue sur Z, on a donc : $\boxed{\mathbb{P}(|< X, Y >| \geq \varepsilon) \leq 2exp(\frac{-\varepsilon^2 n}{2})}$

Q44) $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{1\leq i<j\leq N} |< X^i|X^j >| \geq \epsilon\Big) \leq \sum\limits_{1\leq i<j\leq N} \mathbb{P}\Big(|< X^i|X^j >| \geq \epsilon\Big)$

On utilise alors Q43) : $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{1\leq i<j\leq N} |< X^i|X^j >| \geq \epsilon\Big) \leq \sum\limits_{1\leq i<j\leq N} 2exp(\frac{-\epsilon^2 n}{2})$ (cette somme a $\frac{N(N-1)}{2}$ termes)

et donc $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{1\leq i<j\leq N} |< X^i|X^j >| \geq \epsilon\Big) \leq \frac{N(N-1)}{2} 2exp(\frac{-\epsilon^2 n}{2}) \leq N(N-1)exp(\frac{-\epsilon^2 n}{2})$

Bilan : $\boxed{\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{1\leq i<j\leq N} |< X^i|X^j >| \geq \epsilon\Big) \leq N(N-1)exp(\frac{-\epsilon^2 n}{2})}$

Q45) Si $n \geq 4\frac{ln(N)}{\epsilon^2}$ alors $\frac{\epsilon^2 n}{2} \geq 2ln(N)$ et donc $-2ln(N) \geq -\frac{\epsilon^2 n}{2}$
On utilise que exp est croissante et donc $exp(-\frac{\epsilon^2 n}{2}) \leq exp(-2ln(N))$
On reporte dans l'inégalité de Q44) :
$\mathbb{P}(\bigcup\limits_{1\leq i<j\leq N} |< X^i|X^j >| \geq \epsilon) \leq N(N-1)exp(-2ln(N)) = \frac{N(N-1)}{N^2} = 1 - \frac{1}{N} < 1$

On a donc $\boxed{\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{1\leq i<j\leq N} |< X^i|X^j >| \geq \epsilon\Big) < 1}$

Q46) La condition de Q45) s'écrit aussi : $n \geq 4\frac{ln(N)}{\epsilon^2} \Leftrightarrow \frac{n\epsilon^2}{4} \geq ln(N) \Leftrightarrow N \leq exp(\frac{n\epsilon^2}{4})$

On déduit de Q45) que $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{1\leq i<j\leq N} |< X^i|X^j >| < \epsilon\Big) > 0$, l'événement $\Big(\bigcup\limits_{1\leq i<j\leq N} \big(|< X^i|X^j >| < \epsilon\big)\Big)$ est donc possible.

On remarque que les (X^i) sont unitaires.

Bilan :

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } N \text{ tel que } N \leq exp(\frac{n\epsilon^2}{4}),}$

$\boxed{\text{il existe un famille de vecteurs unitaires de } \mathbb{R}^n \text{ dont le paramètre de cohérence est majorée par } \epsilon.}$