PSI* 2024-2025, Mathématiques DS n°7

Correction : ccINP PC , 2017

Q1) Le tirage de la lettre P ou de la lettre Q est une épreuve de Bernoulli de paramètre p si on considère qu'obtenir C est un succès.
Dans cette question, on effectue une succession d'épreuves de Bernoulli, indépendantes, de même paramètre q jusqu'à l'obtention d'un succès.

$$\boxed{Y \text{ suit donc une loi géométrique de paramètre } q \text{ et on a : } \begin{cases} & Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall n \in \mathbb{N}^* , & P(Y = n) = p^{n-1}q \end{cases}}$$

Q2) Avec Q1) on a : $G_Y(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(Y = n)t^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} qp^{n-1}t^n = (qt) \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (pt)^{n-1}$

On a une série géométrique de raison pt donc convergente si et seulement si $|pt| < 1 \Leftrightarrow |t| < \frac{1}{p}$
On en déduit $R_Y = \frac{1}{p}$ et $\forall t \in]-R_Y, R_Y[$, $G_Y(t) = qt\frac{1}{1-pt}$
On note que $p \in]0, 1[\Rightarrow R_Y = \frac{1}{p} > 1$

On a donc : $\boxed{R_Y = \frac{1}{p} \Rightarrow > 1 \text{ et } \forall t \in]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[\ , \ G_Y(t) = \frac{qt}{1-pt}}$

Q3) Avec l'expression de Q2), G_Y est C^∞ sur son domaine et donc en particulier en $t = 1$.
De plus $\forall t \in]-R_Y, R_Y[$, $G'(t) = \frac{q(1-pt)+p(qt)}{(1-pt)^2} = \frac{q}{(1-pt)^2}$ et $G''(t) = -2(-p)\frac{q}{(1-pt)^3} = \frac{2pq}{(1-pt)^3}$

Alors : $G_Y'(1) = \frac{q}{(1-p)^2} = \frac{q}{q^2} = \frac{1}{q}$ et $G_Y''(1) = \frac{2pq}{(1-p)^3} = \frac{2pq}{q^3} = \frac{2p}{q^2}$

Conclusion : $\boxed{G_Y \text{ est deux fois dérivable en 1 et } G_Y'(1) = \frac{1}{q} \text{ et } G_Y''(1) = \frac{2p}{q^2}}$

Q4) Comme G_Y est dérivable (à gauche) deux fois en 1, on sait d'après le cours que :
$E(Y) = G_Y'(1) = \frac{1}{q}$ et $V(Y) = G_Y''(1) + G_Y'(1) - (G_Y'(1))^2 = \frac{2p}{q^2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q^2} = \frac{2p+q-1}{q^2} = \frac{2p-p}{q^2} = \frac{p}{q^2}$

On a donc : $\boxed{E(Y) = \frac{1}{q} \text{ et } V(Y) = \frac{p}{q^2}}$

Q5) $\sum u_n(a)z^n = \sum \frac{1}{a}(\frac{z}{a})^n$ est une série géométrique de raison $\frac{z}{a}$ convergente
si et seulement si $\left|\frac{z}{a}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$

Donc : $\boxed{\sum u_n(a)z^n \text{ est une série entière de rayon de convergence } |a|}$

Q6) Si $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < |a|$ alors, par somme des termes d'une série géométrique de raison < 1 :
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(a)z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a}(\frac{z}{a})^n = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = \frac{1}{a-z}$

Bilan : $\boxed{\text{Si } z \in \mathbb{C} \text{ vérifie } |z| < |a| \text{ alors on a : } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(a)z^n = \frac{1}{a-z}}$

Q7) $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(a)u_{n-k}(b) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{a^{k+1}}\frac{1}{b^{n-k+1}} = \frac{1}{a}\frac{1}{b^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{a^k}\frac{1}{b^{-k}} = \frac{1}{ab^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{n}(\frac{b}{a})^k$

On a la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{b}{a} \neq 1$ (car $|a| < |b|$) et donc :

$v_n = \frac{1}{ab^{n+1}}\frac{1-(\frac{b}{a})^{n+1}}{1-\frac{b}{a}} = \frac{1}{ab^{n+1}}\frac{a}{a-b}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^{n+1}} = \frac{1}{a-b}\Big(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}}\Big)$

On a donc : $\boxed{v_n = \frac{1}{ab^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{n}(\frac{b}{a})^k = \frac{1}{a-b}\Big(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}}\Big)}$

Q8) On reprend Q7) et on a : $v_n = \frac{1}{a-b}\frac{1}{a^{n+1}}\Big((\frac{a}{b})^{n+1} - 1\Big)$

Mais $|a| < |b|$ donc $-(\frac{a}{b})^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $v_n \sim \frac{1}{a-b}\frac{1}{a^{n+1}}(-1)$

Bilan : $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{b-a}\frac{1}{a^{n+1}}}$

Q9) • D'après Q8) : $\sum v_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum \frac{1}{b-a}\frac{1}{a^{n+1}}z^n$, c'est-à-dire que $\sum u_n(a)z^n$ et a donc pour rayon de convergence $|a|$ par Q5).

• De plus, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |a|$ alors : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n z^n = \frac{1}{b-a}\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(b)z^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(a)z^n\Big)$

On utilise alors Q6) et :

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n z^n = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{(z-a)-(z-b)}{(z-a)(z-b)}\right) = \frac{1}{b-a}\frac{b-a}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$

• On a donc : $\boxed{\sum v_n z^n \text{ a pour rayon de convergence } |a| \text{ et si } |z| < |a| \text{ alors } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n z^n = \frac{1}{(z-a)(z-b)}}$

Q10) Comme $\lambda \neq 0$ alors $\sum v_n z^n$ et $\sum \lambda v_n z^n$ ont même rayon de convergence.
On sait aussi que $\sum \lambda v_n z^n$ et $\sum \lambda v_n z^{n+2}$ ont même rayon de convergence.
On sait donc que $\sum \lambda v_n z^{n+2}$ a pour rayon de convergence $|a|$

On a si t réel tel que $|t| < |a|$: $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda v_n t^{n+2} = \frac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}$

$\boxed{f \text{ est développable en série entière en 0 et la série entière qui lui est associée}}$
$\boxed{\text{a pour rayon de convergence } R_f = |a|}$

Q11) On remarque que : $g(t) = f(t)\frac{t}{t-c}$ avec $f(t)$ qui est développable en série entière en 0 de rayon de convergence $|a|$ et $\frac{t}{t-c} = t\frac{1}{t-c}$ qui est développable en série entière en 0 de rayon de convergence $R_c = |c|$

Par produit de Cauchy, g est DSE_0 de rayon de convergence $R_g \geq Min(|a|, |c|) = |a|$

Bilan : $\boxed{g \text{ est développable en série entière en 0 de rayon de convergence } R_g \geq |a|}$

Q12) • On a clairement $p_1 = 0$ car on ne peut pas atteindre le niveau 2 en un seul coup !!!

• On a : $(Z = 2) = (C_1 \cap C_2)$ et comme C_1 et C_2 sont indépendantes alors :
$p_2 = P(Z = 2) = P(C_1)P(C_2) = q^2$

• On a : $(Z = 3) = (P_1 \cap C_2 \cap C_3)$ et comme P_1, C_2 et C_3 sont indépendantes alors :
$p_3 = P(Z = 2) = P(P_1)P(C_2)P(C_3) = pq^2$

• On a donc : $\boxed{p_1 = 0,\ p_2 = q^2 \text{ et } p_3 = pq^2}$

Q13) (P_1, C_1) est clairement un système complet d'événement donc $P_1 \cap C_1 = \emptyset$
On en déduit $P_1 \cap (C_1 \cap P_2) = \emptyset$ et $P_1 \cap (C_1 \cap C_2) = \emptyset$
De même (P_2, C_2) est clairement un système complet d'événement et donc $(C_1 \cap P_2) \cap (C_1 \cap C_2) = \emptyset$

De plus $P_1 \cup (C_1 \cap P_2) \cup (C_1 \cap C_2) = P_1 \cup (C_1 \cap \underbrace{(C_2 \cap P_2)}_{\Omega}) = P_1 \cup C_1 = \Omega$

Donc : $\boxed{(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2) \text{ est un système complet d'événements.}}$

Q14) On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements de Q13) et on obtient, pour $n \geq 3$:
$P(Z = n) = P(Z = n|P_1)P(P_1) + P(Z = n|C_1 \cap P_2)P(C_1 \cap P_2) + P(Z = n|C_1 \cap C_2)P(C_1 \cap C_2)$

Mais, comme $n \geq 3$, on a $P(Z = n|C_1 \cap C_2) = 0$ puisque l'on est dans le cas $Z = 2$

De plus, $P(Z = n|C_1 \cap P_2) = P(Z = n - 2)$ puisque, si l'événement $(C_1 \cap P_2)$ a lieu, on est à l'état 0 au bout de deux coups, et c'est comme si on recommençait à 0

De même $P(Z = n|P_1) = P(Z_{n-1})$, puisque après le premier coup on est à l'état 0.

On a déjà vu : $P(P_1) = p$, $P(C_1 \cap P_2) = pq$ et $P(C_1 \cap C_2) = q^2$.

On reporte toutes les valeurs trouvées dans la formule obtenue par la formule des probabilités totales et on a : $P(Z = n) = P(Z = n - 1)p + P(Z = n - 2)pq + 0$

On donc : $\boxed{\forall n \geq 3\ ,\ p_n = pp_{n-1} + pqp_{n-2}}$

Q15) Soit $t \in [-1, 1]$.
Alors avec Q14) : $\forall n \geq 3\ ,\ p_n t^n = (pp_{n-1} + pqp_{n-2})t^n \Leftrightarrow p_n t^n = ptp_{n-1}t^{n-1} + pqt^2 p_{n-2}t^{n-2}$
Comme $R_Z \geq 1$, on peut sommer de $n = 3$ à $+\infty$ puisque les séries convergent et on obtient :
$\sum_{n=3}^{+\infty} p_n t^n = pt(\sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-1}t^{n-1}) + pqt^2(\sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-2}t^{n-2})$ Par changement d'indice :
$\sum_{n=3}^{+\infty} p_n t^n = pt(\sum_{n=2}^{+\infty} p_n t^n) + pqt^2(\sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n) \Rightarrow G_Z(t) - p_2 t^2 - p_1 t = pt(G_Z(t) - p_1 t) + pqt^2(G_Z(t))$
mais comme $p_1 = 0$ et $p_2 = q^2$: $G_Z(t) - q^2t^2 = ptG_Z(t) + pqtG_Z(t) \Rightarrow (1 - pt - pqt^2)G_Z(t) = q^2t^2$

On a bien : $\boxed{\forall t \in [-1, 1]\ ,\ (1 - pt - pqt^2)G_Z(t) = q^2t^2}$

Q16) $Q(-1) = 1 + p - pq = 1 + p\underbrace{(1-q)}_{p} = 1 + p^2$

$Q(1) = \underbrace{1-p}_{q} - pq = q - pq = q\underbrace{(1-p)}_{q} = q^2$

On a donc : $\boxed{Q(-1) = 1 + p^2 > 0 \text{ et } Q(1) = q^2 > 0}$

Q17) Q est de degré 2, Δ est son discriminant, a et b sont les racines de Q et $-pq$ est le coefficient dominant de Q.

On a donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ Q(t) = -pq(t-a)(t-b)}$

Q18) • $Q(-1) > 0$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} Q(t) = -\infty$, comme Q est continue, par généralisation du théorème des valeurs intermédiaires, Q admet une racine sur $]-\infty, -1[$
• De même $Q(1) > 0$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} Q(t) = +\infty$, comme Q est continue, par généralisation du théorème des valeurs intermédiaires, Q admet une racine sur $]1, +\infty[$
• Q est de degré 2 et admet exactement 2 racines, donc, avec les deux points précédents et le fait évident que $b < a$ on obtient : $b < -1 < 1 < a$
On en déduit donc $|a| > 1$ et $|b| > 1$
Mais aussi : $|a| = \frac{\sqrt{\Delta} - p}{2pq} < \frac{\sqrt{\Delta} + p}{2pq} = -b = |b|$

• Bilan : $\boxed{1 < |a| < |b|}$

Q19) • A l'aide de Q10) on a directement f est DSE_0 de rayon de convergence $|a|$

Avec Q15) on a $\forall t \in [-1, 1]\ ,\ f(t) = G_Z(t)$, par identification avec le développement de Taylor et l'unicité du DSE_0 on a $f = G_Z$ et donc $\boxed{R_Z = |a|}$

Q20) En poursuivant le raisonnement de Q19) : $\boxed{\forall t \in]-|a|\,, |a|\,[\ ,\ G_Z(t) = \frac{q^2t^2}{1-pt-pqt^2}}$

Q21) $|a| > 1$ donc G_Z est dérivable deux fois à gauche en $t = 1$.
On sait donc d'après le cours, que Z admet une espérance et une variance.
On a de plus $E(Z) = G'_Z(1)$
Or $\forall t \in]-|a|\,, |a|\,[\ ,\ G'_Z(t) = q^2 \frac{2t(1-pt-pqt^2) - t^2(-p-2tpq)}{(1-pt-pqt^2)^2}$
Donc $E(Z) = q^2 \frac{2(1-p-pq) - (-p-2pq)}{(1-p-pq)^2} = q^2 \frac{2-p}{(q-pq)^2} = q^2 \frac{2-p}{(q^2)^2} = \frac{1+q}{q^2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}$

Bilan : $\boxed{Z \text{ admet une espérance et une variance et } E(Z) = q^{-1} + q^{-2}}$

Q22) D'après Q4), $E(Y) = \frac{1}{q} = q^{-1}$ et d'après Q21), $E(Z) = q^{-1} + q^{-2}$ donc
$E(Z) - (E(Y) + 1) = q^{-1} + q^{-2} - (q^{-1} + 1) = \frac{1}{q^2} - 1 = \frac{1-q^2}{q^2} > 0$ car $q \in]0, 1[$ donc $1 - q^2 > 0$

On en déduit : $\boxed{E(Z) \geq E(Y) + 1}$

Q23) Pour avoir 2 "C" consécutifs, il en en faut déjà un, puis faire un coup de plus pour avoir le deuxième. Donc l'inégalité de Q22) était $\boxed{\text{prévisible.}}$

Q24) La dernière colonne de A est nulle, donc :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A \text{ et } \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre associé.}}$$

Q25) $\chi_A(t) = det(A - tI_4) = det(tI_4 - A)$ car on est en dimension 4. Il s'agit bien du polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} p-t & 0 & p & 0 \\ q & q-t & 0 & 0 \\ 0 & p & -t & 0 \\ 0 & 0 & q & -t \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la quatrième colonne :

$$\chi_A(t) = (-t)\begin{vmatrix} p-t & 0 & p \\ q & q-t & 0 \\ 0 & p & -t \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne :

$$\chi_A(t) = (-t)[(p-t)\begin{vmatrix} q-t & 0 \\ p & -t \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} q & q-t \\ 0 & p \end{vmatrix}]$$

$$= (-t)[(p-t)(q-t)(-t) + pqp]$$

$$= (-t)[-t(pq-(p+q)t+t^2) + p^2q]$$

$$= t^4 - \underbrace{(p+q)}_{=1} t^3 + pqt^2 - p^2qt$$

On a donc : $\boxed{\chi_A(t) = t^4 - t^3 + pqt^2 - p^2qt}$

Q26) $(E_t) \Leftrightarrow S = tAS + L \Leftrightarrow S - tAS = L \Leftrightarrow (I_4 - tA)S = L$

$\boxed{S \text{ est solution de } (E_T) \text{ si et seulement si } (I_4 - tA)S = L}$

Q27) Pour $t \neq 0$: $\psi_A(t) = det(I_4 - tA) = det(t(\frac{1}{t}I_4 - A)) = t^4 det(\frac{1}{t}I_4 - A) = t^4\chi_A(\frac{1}{t})$

On a donc : $\boxed{\psi_A(t) = t^4\chi_A(\frac{1}{t})}$

Q28) Avec Q25) : $\psi_A(t) = t^4[\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^3} + pq\frac{1}{t^2} - p^2q\frac{1}{t}] = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1$

On a donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}$

Q29) Avec Q28) : $\psi_A(0) = 1$ donc, par continuité de ψ_A, $\psi_A(t) \neq 0$ au voisinage de 0, donc $I_4 - tA$ est inversible pour t au voisinage de 0 et donc (E_t) possède une unique solution $S = (I_4 - tA)^{-1}L$

$\boxed{\text{Pour } t \text{ au voisinage de } 0 : (E_t) \text{ possède une unique solution.}}$

Q30) Par définition du produit matricielle : $(I_4 - tA)S = S_0U_1 + S_1U_2 + S_2U_3 + S_3U_4$ et comme les S_i sont des réels et que S est solution de (E_t) alors : $\boxed{L = U_1S_0 + U_2S_1 + U_3S_2 + U_4S_3}$

Q31) On remplace L par l'expression de Q30) dans :
$det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, L)$
$= det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, U_1 S_0 + U_2 S_1 + U_3 S_2 + U_4 S_3)$
$= det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4 S_3)$
$= S_3 \underbrace{det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4)}_{det(I_4 - tA)}$ car le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne et que si on a deux colonnes proportionnelles le det est nul.

On a donc : $\boxed{det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4) = S_3 \psi_A(t)}$

Q32) $det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = \begin{vmatrix} 1-pt & 0 & -p & 1 \\ -qt & 1-qt & 0 & 0 \\ 0 & -pt & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -qt & 0 \end{vmatrix}$
On développe par rapport à la quatrième colonne et on a après un déterminant d'une matrice triangulaire. Donc $det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = (-1)(-pq^2t^3) = pq^2t^3$

On a l'expression de $\psi_A(t)$ avec Q28).

De Q31) on déduit : $S_3 = \frac{det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, L)}{\psi_A(t)} = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}$

On a donc $\boxed{S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}}$

Q33) λ valeur propre de A
$\Leftrightarrow det(A - \lambda I_4) = 0$
$\Leftrightarrow det((A - \lambda I_4)^T) = 0$ la transposition ne change pas le déterminant
$\Leftrightarrow det(A^T - \lambda I_4) = 0$
$\Leftrightarrow$ $\boxed{\lambda \text{ valeur propre de } A^T}$

Q34) λ est valeur propre de A^T, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

Alors $A^T X = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 = \lambda x_3 \\ 0 = \lambda x_4 \end{cases}$

Comme $\lambda \neq 0$ alors $x_4 = 0$ (et donc, puisque $X \neq 0$ car vecteur propre, au moins un des autres x_i est non nul) et on a :

$$\boxed{\text{il existe trois complexes (non tous nuls) } x_1,\ x_2 \text{ et } x_3 \text{ tels que : } \begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 = \lambda x_3 \end{cases}}$$

Q35) Comme X est non nul car c'est un vecteur propre alors $M > 0$.
On reprend les cas de l'énoncé.

Cas 1 : $M = |x_3|$
$M > 0$ car X est un vecteur propre, donc $x_3 \neq 0$ et la troisième ligne donne :
$px_1 = \lambda x_3 \Rightarrow \lambda = \frac{px_1}{x_3} \Rightarrow |\lambda| = p\frac{|x_1|}{M} \leq p < 1$ car $\frac{|x_1|}{M} \leq 1$ par définition de M

On a donc $|\lambda| < 1$

Cas 2 : $M = |x_2|$ avec $M > |x_3|$
La deuxième ligne donne puisque $x_2 \neq 0$:
$qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \Rightarrow \lambda = q + \frac{px_3}{x_2}$
Par inégalité triangulaire : $|\lambda| \leq q + p\underbrace{\left|\frac{x_3}{x_2}\right|}_{<1} < q + p = 1$

On a donc $|\lambda| < 1$

Cas 3 : $M = |x_1|$ avec $M > |x_2|$ et $M > |x_1|$
La première ligne donne, puisque $x_1 \neq 0$:
$px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \Rightarrow \lambda = p + q\frac{x_2}{x_1}$
Par inégalité triangulaire : $|\lambda| \leq p + q\underbrace{\left|\frac{x_2}{x_1}\right|}_{<1} < p + q = 1$

On a donc $|\lambda| < 1$

On a $|\lambda| < 1$ dans tous les cas possible donc : $\boxed{|\lambda| < 1}$

Q36) A est une matrice de $M_4(\mathbb{R})$ donc A possède 4 valeurs propres (sans compter l'ordre de multiplicité).
On sait par Q24) que 0 est valeur propre de A.
Notons λ_1, λ_2 et λ_3 les 3 autres que l'on classe par leur module, quitte à changer l'ordre, pour avoir : $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$
Comme 0 est valeur propre simple de χ_A alors 0 est valeur propre simple donc $|\lambda_1| > 0$ et $|\lambda_3| < 1$ par Q35) donc finalement : $\boxed{0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| < 1}$

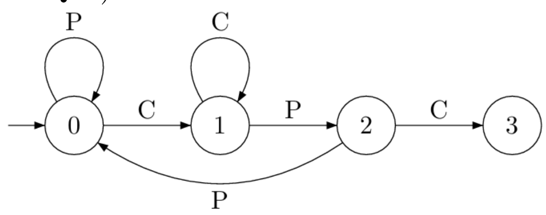
De plus, comme χ_A est de degré 4, unitaire et que l'on connaît ces racines alors :
$\boxed{\chi_A(t) = t(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)}$

Q37) $\psi_A(t) = t^4\chi_A(\frac{1}{t})$ et on utilise Q36) :
$\psi_A(t) = t^4\frac{1}{t}(\frac{1}{t}-\lambda_1)(\frac{1}{t}-\lambda_2)(\frac{1}{t}-\lambda_3) = (1-\lambda_1 t)(1-\lambda_2 t)(1-\lambda_3 t)$

Donc $\psi_A(t) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\frac{1}{\lambda_1}-t)(\frac{1}{\lambda_2}-t)(\frac{1}{\lambda_3}-t) = (-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)(t-\frac{1}{\lambda_1})(t-\frac{1}{\lambda_2})(t-\frac{1}{\lambda_3})$

On a donc la forme voulue avec : $\boxed{c = \frac{1}{\lambda_1},\ b = \frac{1}{\lambda_2} \text{ et } a = \frac{1}{\lambda_3} \text{ et } \mu = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$

Q38) Il faut faire attention à rester à l'état 1, si on a un C et on a :



Q39) Comme on est à l'état 0 initialement alors : $\boxed{p_{0,0} = 1 \text{ et } p_{0,1} = p_{0,2} = p_{0,3} = 0}$

Q40) Par la formule des probabilités totale sur le système complet d'événements $(E_{n-1,0}, E_{n-1,1}, E_{n-1,2}, E_{n-1,3})$ on a : $\forall k \in [\![0;3]\!]$,
$P(E_{n,k})$
$= P(E_{n,k}|E_{n-1,0})P(E_{n-1,0}) + P(E_{n,k}|E_{n-1,1})P(E_{n-1,1}) + P(E_{n,k}|E_{n-1,2})P(E_{n-1,2}) + P(E_{n,k}|E_{n-1,3})P(E_{n-1,3})$

Le schéma permet d'obtenir les probabilités conditionnelles :
$P(E_{n,0}|E_{n-1,0}) = p$, $P(E_{n,0}|E_{n-1,1}) = 0$, $P(E_{n,0}|E_{n-1,2}) = p$ et $P(E_{n,0}|E_{n-1,3}) = 0$

En reportant ci-dessus on a : $P(E_{n,k}) = pP(E_{n-1,0}) + pP(E_{n-1,2})$ donc $\boxed{p_{n,0} = pp_{n-1,0} + pp_{n-1,2}}$

Les autres relations s'obtiennent exactement de la même manière.

Q41) On reprend la première relation et on la multiplie par t^n et on somme de $n = 1$ à $+\infty$
Pour $t \in [-1, 1]$ on est sûr que les séries convergent car on a des séries entières de rayons de convergences ≥ 1 puisque ce sont des séries génératrices.

Alors : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_{n,0}t^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} pp_{n-1,0}t^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} pp_{n-1,2}t^n$
Donc $S_0(t) - p_{0,0} = ptS_0(t) + ptS_2(t)$ et donc $\boxed{S_0(t) = tpS_0(t) + tpS_2(t) + 1}$

Les autres relations s'obtiennent exactement de la même manière.

Q42) Le système de Q41) s'écrit : $(I_4 - tA)S(t) = L$ donc $\boxed{S(t) \text{ est solution de } (E_t)}$

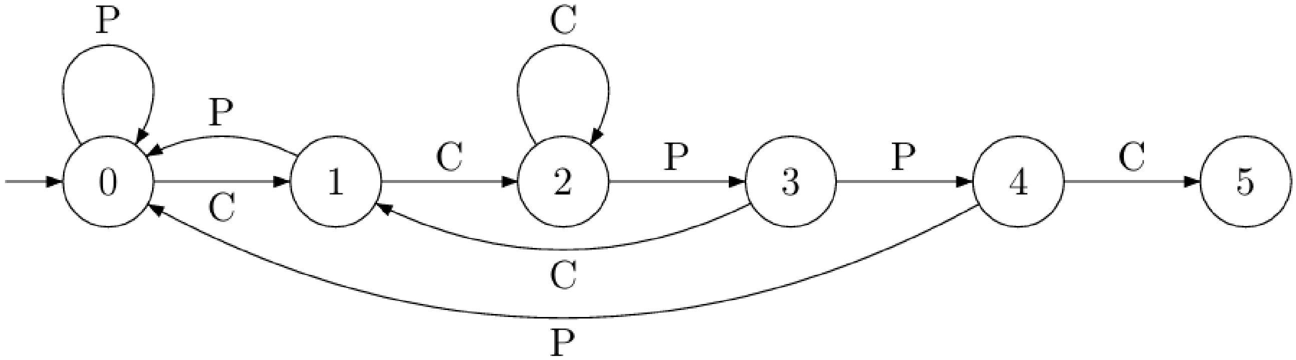
Q43) On a $G_T = S_3$ et d'après Q37), $\forall t \in]+R_T, R_T[$, $S_3(t) = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3+pqt^2-t+1}$

On a donc $\boxed{R_T > 1 \text{ et } \forall t \in]+R_T, R_T[\ ,\ G_T(t) = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3+pqt^2-t+1}}$

Q44) $R_T > 1$, donc, en tant que série entière G_T est dérivable deux fois à gauche en $t = 1$ et d'après le cours on en déduit que : $\boxed{T \text{ admet une espérance et une variance.}}$

Q45) On a $E(T) = G'_T(1)$. Après calculs : $\boxed{E(T) = \frac{1+q-q^2}{q^2(1-q)}}$

Q46) On commence par dessiner le schéma correspondant au mot CCPPC :



Ensuite on pose la matrice correspondant : $A = \begin{pmatrix} p & p & 0 & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & q & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$

et on fait comme avant en un peu plus compliqué ...