Chapitre 19,20,21 : Variables aléatoires

Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice v.a.1

Une variable aléatoire X suit une loi de probabilité donnée par le tableau de probabilité suivant :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X)=k$	$\frac{1}{4}$	p	p^2

avec $p \in \mathbb{R}$

Déterminer la valeur de p et calculer l'espérance de X.

Correction

$(X=0, X=1, X=2)$ est le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X.
Donc $\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}+p+p^2=1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}+p+p^2=0$
$\Delta = 1+3=4=2^2$, donc $p=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$ ou $p=\frac{-1-2}{2}=\frac{-3}{2}$
Mais $p=\mathbb{P}(X=1)$ donc $p\in[0;1]$ et la valeur $\frac{-3}{2}$ est à exclure.

On a donc $\boxed{p=\frac{1}{2}}$

$E(X)=0.\mathbb{P}(X=0)+1.\mathbb{P}(X=1)+2.\mathbb{P}(X=2)=p+2p^2=\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}=1$ on a donc $\boxed{E(X)=1}$

Enoncé, Exercice v.a.2

Un joueur lance deux dé à six faces équilibrés. Les lancers des deux dés sont indépendants.
Sur le premier dé les faces sont numérotées de 1 à 6. Sur le deuxième, il y a trois faces 1 et trois faces -1.
On considère l'application X qui associe la somme des deux dés.
a) Déterminer $X(\Omega)$.
b) Déterminer la loi de X
c) Déterminer $E(X)$

Correction

a) On a directement : $\boxed{X(\Omega)=[\![0;7]\!]}$

b) On a le tableau suivant qui résumé l'expérience :

Dé 1 / Dé 2	1	2	3	4	5	6
-1	0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6	7

Comme les dés sont équilibrées et les lancers indépendants, chaque couple $(d1, d2)$ est équiprobable avec une probabilité de $\frac{1}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

En "comptant" les cases du tableau on obtient :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X) = k$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

On a donc la loi de X et $\boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{7} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{7}{2}}$

Remarque : même moyenne que le dé à six faces seul (logique puisque l'on rajoute 0 en moyenne).

Enoncé, Exercice v.a.3

On lance une pièce avec la probabilité $p \in]0; 1[$ d'obtenir face.
On lance cette pièce jusqu'à obtenir deux piles et on note X la variable aléatoire correspondant au rang du lancer du deuxième pile.
Déterminer la loi, la fonction génératrice, l'espérance et la variance de X.

Correction

On peut remarquer que $X(\Omega) = [\![2; +\infty]\!]$ puisqu'il faut au moins deux lancers pour obtenir Pile.

On note F_i l'événement obtenir Face au i-ième lancer.

On a alors $(X = n) = \bigcup_{j=1}^{n-1} ((\bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n-1} F_i) \cap \overline{F_j}) \cap \overline{F_n})$

On traduit le fait que le premier Pile est en j-ième position (n-1 possibilités), le deuxième en n-ième position, les autres lancers étant des Faces.

Comme le premier Pile ne peut-être qu'à une seule position, on a par incompatibilité des événements $((\bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n-1} F_i) \cap \overline{F_j}) \cap \overline{F_n}$: $\mathbb{P}(X = n) = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(((\bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n-1} F_i) \cap \overline{F_j}) \cap \overline{F_n})$

et par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}(X = n) = \sum_{j=1}^{n-1} (1-p)^2 p^{n-2} = (n-1)(1-p)^2 p^{n-2}$$

La loi de X est donc donné par : $\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = [\![2; +\infty]\!] \\ \forall n \in X(\Omega) \;\; \mathbb{P}(X = n) = (n-1)(1-p)^2 p^{n-2} \end{cases}}$

La fonction génératrice de X vaut donc :

$$g_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n = \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)(1-p)^2p^{n-2}t^n = (1-p)^2t^2\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)(pt)^{n-2}$$

On sait, d'après le cours, que : $\forall x \in]-1;1[\ \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ On peut dériver terme à terme une série entière sur son intervalle ouverte de convergence, on a donc : $\forall x \in]-1;1[\ \ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$

Par un changement d'indice on a : $\forall x \in]-1;1[\ \ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)x^{n-2}$

On va poser $x = pt$. $|pt| < 1 \Leftrightarrow |t| \leq \frac{1}{p}$

Donc g_X est de rayon de convergence $\frac{1}{p}$ et $\forall x \in]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[$, $g_X(t) = (1-p)^2t^2\frac{1}{(1-pt)^2}$

Comme $\frac{1}{p} > 1$ et qu'une série entière est C^2 sur son intervalle ouvert de convergence alors g_X est C^2 en $x = 1$ et donc, d'après le cours : $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

$g'_X(t) = (1-p)^2 2t\frac{1}{(1-pt)^2} + (1-p)^2t^2\frac{2p}{(1-pt)^3}$

et $g''_X(t) = (1-p)^2 2\frac{1}{(1-pt)^2} + (1-p)^2 2t\frac{2p}{(1-pt)^3} + (1-p)^2 2t\frac{2p}{(1-pt)^3} + (1-p)^2t^2\frac{6p}{(1-pt)^4}$

Donc $g'_X(1) = 2(1-p)^2\frac{1}{(1-p)^2} + (1-p)^2\frac{2p}{(1-p)^3} = 2 + \frac{2p}{1-p} = \frac{2}{1-p} = E(X)$

et $g''_X(1) = (1-p)^2 2\frac{1}{(1-p)^2} + (1-p)^2 2\frac{2p}{(1-p)^3} + (1-p)^2 2\frac{2p}{(1-p)^3} + (1-p)^2\frac{6p}{(1-p)^4}$

$= 2 + \frac{4p}{1-p} + \frac{4p}{1-p} + \frac{6p}{(1-p)^2}$

$= \frac{2-4p+2p^2+4p-4p^2+4p-4p^2+6p}{(1-p)^2} = \frac{2+10p-6p^2}{(1-p)^2}$

Alors $V(X) = \frac{2+10p-6p^2}{(1-p)^2} + \frac{2}{1-p} - (\frac{2}{1-p})^2 = \frac{2+10p-6p^2+2-2p-4}{(1-p)^2} = \frac{-6p^2+8p}{(1-p)^2} = \frac{2p(4-3p)}{(1-p)^2}$

Bilan : La loi de X est donc donné par : $\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = [\![2;+\infty]\!] \\ \forall n \in X(\Omega)\ \ \mathbb{P}(X=n) = (n-1)(1-p)^2p^{n-2} \end{cases}}$

La fonction génératrice est définie sur $]-\frac{1}{p};\frac{1}{p}[$ et vaut $g_X(t) = (1-p)^2t^2\frac{1}{(1-pt)^2}$

On a $E(X) = \frac{2}{1-p}$ et $V(X) = \frac{2p(4-3p)}{(1-p)^2}$

Enoncé, Exercice v.a.4

On lancer deux fois de suite un dé équilibré à $n \geq 1$ faces et on appelle X la variable aléatoire correspondant au maximum des deux lancers.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer $E(X)$

Indication : On donne $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Correction

a) On a de manière directe $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$

On peut modéliser l'univers sous la forme $\Omega = [\![1;n]\!]^2$, c'est-à-dire que si $(a,b) \in \Omega$ alors a est le résultat du premier lancer et b celui du deuxième.
Le dé étant équilibré, chaque événement élémentaire de Ω à la même probabilité : $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$

On écrit, pour $k \in X(\Omega)$: $(X = k) = \{(k,k)\} \bigcup (\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} (\{(i,k)\} \cup \{(k,i)\}))$

On a donc $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1+2(k-1)}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$

La loi de X est donc donnée par : $\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = [\![1;n]\!] \\ \forall k \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{2k-1}{n^2} \end{cases}}$

b) On a $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\frac{2k-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}(2(\sum\limits_{k=1}^{n} k^2) - (\sum\limits_{k=1}^{n} k))$
$E(X) = \frac{1}{n^2}(2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}) = \frac{n(n+1)}{n^2}(\frac{2n+1}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{n(n+1)}{n^2}\frac{4n+2-3}{6} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6n^2}$

On a donc $\boxed{E(X) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}}$

Par exemple pour $n = 6$, $E(X) = \frac{7.23}{6.6} = \frac{161}{36} \approx 4.47\overline{2}$

Enoncé, Exercice v.a.5

Cette année les rugbyman de Psikopat ont une défense pas au top et prennent en moyenne 2,5 buts essai match avec une variance de 1,1.
Majorer la probabilité que le prochain match ne se termine pas avec deux ou trois essais!!!

Correction

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'ssais encaissés. On cherche ici la probabilité que $X \leq 1$ ou $X \geq 4$ et on sait que $E(X) = 2,5$ et $V(X) = 1,1$.
Cela revient donc à dire que $|X - E(X)| \geq 1,5$
On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour obtenir $P(|X - E(X)| \geq 1,5) \leq \frac{V(X)}{(1{,}5)^2} = \frac{1{,}1}{(1{,}5)^2} = \frac{22}{45}$

La probabilité que le match ne se termine pas par deux ou trois essais est inférieure à $\frac{22}{45} \approx 0,49$.

Enoncé, Exercice v.a.6

On suppose que X suit une loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$ avec $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $0 \leq a < b$

a) Rappeler la loi de X.

b) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$

Correction

a) $\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = [\![a..b]\!] \\ \forall k \in [\![a..b]\!] \ , \ P(X=k) = \frac{1}{b-a+1} \end{cases}}$

b) Posons $Y = X - a + 1$, pour avoir Y qui suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ avec $n = b - a + 1$

Alors $E(Y) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y=k) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2}\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$

$E(Y^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{n}(\sum\limits_{k=1}^{n} k^2) = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - (\frac{n+1}{2})^2 = \frac{n+1}{12}(2(2n+1) - 3(n+1)) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}$

Par linéarité de l'espérance :

$E(X) = E(Y + a - 1) = E(Y) + a - 1 = \frac{n+1}{2} + a - 1 = \frac{b-a+1+1}{2} + a - 1 = \frac{b-a+2+2a-2}{2} = \frac{b+a}{2}$

On sait aussi d'après le cours que $V(X) = V(Y + a - 1) = V(Y)$

Donc $\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}}$

Enoncé, Exercice v.a.7

On suppose que X suit une loi binomiale de paramètre (p, n) avec $p \in]0;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

a) Rappeler la loi de X.
b) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$
c) Si $n = 1$ comment nomme-t-on aussi cette loi ?
d) Déterminer la fonction génératrice de X

Correction

a) $\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = [\![0..n]\!] \\ \forall k \in [\![0..n]\!] \quad p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}}$

b) On pose $q = 1 - p$
$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$
On a donc la formule (du président) : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

Alors $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}$

Changement d'indice : $k' = k - 1$ et on a : $E(X) == np \sum\limits_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} p^{k'} q^{(n-1)-k'}$
Par la formule du binôme : $E(X) = np(p+q)^{n-1} = np$

$E(X(X-1)) = \sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n} n(k-1)\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = n(n-1)p^2 \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)}$
Avec la formule du binôme : $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$
et donc $E(X^2) - E(X) = n(n-1)p^2 \Rightarrow E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^X = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$

On a donc $\boxed{E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p) = npq}$

c) Si $n = 1$ on a une loi de Bernoulli.

d) Par définition la fonction génératrice de X est donnée par $G_X(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(X = k)t^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} [p^k q^{n-k}] t^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k q^{n-k} = (q + pt)^n$

La fonction génératrice de X est donc $\boxed{G_X(t) = (q + pt)^n, \text{ son rayon de convergence vaut } +\infty.}$

Remarque : on peut retrouver l'espérance et la variance avec les formules :
$E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

Enoncé, Exercice v.a.8

On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0;1[$
a) Rappeler la loi de X.
b) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$
c) Déterminer la fonction génératrice de X

Correction

a) $\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \ p(X=k) = (1-p)^{k-1}p \end{cases}}$

b) On utilise la série entière géométrique que l'on peut dériver (deux fois), terme à terme, sur son intervalle ouvert de convergence. On obtient : $\forall \in]-1;1[$ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ puis $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ et enfin $\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$

On a $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}p$, donc, avec la formule, ci-dessus, appliquée en $x = 1-p \in]-1;1[$, X est d'espérance finie et $E(X) = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$

De même :
$E(X(X-1))$
$= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n)$
$= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-1}p = p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} = p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$

Alors $E(X^2) - E(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} \Rightarrow E(X^2) = \frac{2-2p}{p^2} + \frac{1}{p}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2-2p}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-2p+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

X admet donc une variance et $\boxed{E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}}$

c) Par définition la fonction génératrice de X est donnée par :
$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1}pt^n = pt\sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)t)^{n-1} = \frac{pt}{1-(1-p)t}$ pour $t \in]\frac{-1}{p}, \frac{1}{p}[$ à l'aide des séries géométriques.

La fonction génératrice de X est donc $\boxed{G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}, \text{ son rayon de convergence vaut } \frac{1}{p} > 1.}$

Remarque : on peut retrouver l'espérance et la variance avec les formules :
$E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

Enoncé, Exercice v.a.9

On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ avec $\lambda > 0$
a) Rappeler la loi de X.
b) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$
c) Déterminer la fonction génératrice de X

Correction

a) $\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \end{cases}}$

b) $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ on pose $k = n-1$ et on reconnaît le DSE_0 de l'exponentielle
X est d'espérance finie et $E(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k!} = \lambda e^{-\lambda} exp(\lambda) = \lambda$

$E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2 \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}$ on pose $k = n-2$, on reconnaît le DSE_0 de l'exponentielle et on en déduit que X admet une variance et que : $E(X(X-1)) = \lambda^2 \Leftrightarrow E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda$

On a donc $\boxed{E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda}$

c) Par définition la fonction génératrice de X est donnée par :
$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$
pour $t \in \mathbb{R}$ à l'aide du DSE_0 de exp.

La fonction génératrice de X est donc $\boxed{G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}\text{, son rayon de convergence vaut } +\infty.}$

Remarque : on peut retrouver l'espérance et la variance avec les formules :
$E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

Enoncé, Exercice v.a.10

Manu joue au jeu suivant : il choisit un nombre entier m entre 1 et 6, puis il lance un dé à six faces équilibré jusqu'à obtenir un nombre différent de m. On suppose que les lances sont indépendants.
Si il n'obtient aucun m il perd un brouzouf, si il obtient k m consécutifs, il gagne k brouzouf.
On note Y le nombre de brouzouf gagné par Manu et X le nombre de m obtenus.

1°) Déterminer la loi de $X+1$ et en déduire la loi de X.

2°) Calculer l'espérance de Y.

3°) a) Ecrire un programme Python simulant l'expérience et renvoyant la valeur de Y.

3°) b) Ecrire un programme, d'argument n, renvoyant la valeur moyenne de Y sur n expériences.

Correction

1°) $X+1$ est le rang d'apparition du premier lancer différent du nombre choisi. Chaque lancer peut-être vu comme une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$ (obtenir le nombre choisit est un échec et on continue les lancers).

On reconnaît que $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$ (on pose $q = 1-p$)

On en déduit la loi de X qui est donnée par :

$$\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N}\ ,\ P(X=k) = P(X+1=k+1) = p^{k+1-1}q = qp^k \end{cases}}$$

2°) Si on traduit l'énoncé on a que si $X=0$ alors $Y=-1$, si $X>0$ alors $Y=X$

On a alors $E(Y) = -1 \times P(Y=-1) + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} kP(Y=k)$

$$E(Y) = -1 \times P(X=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = -q + \sum_{k=1}^{+\infty} kqp^k = -q + pq\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1}$$

On sait d'après le cours que : $\forall x \in]-1;1[\ ,\ \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k$

On peut dériver terme à terme une série entière sur son intervalle ouvert de convergence et on déduit de l'égalité ci-dessus que : $\forall x \in]-1;1[\ \ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$

On utilise ce résultat pour $x = p \in]-1;1[$ et on a :

$E(Y) = -q + pq\frac{1}{(1-p)^2} = -q + pq\frac{1}{q^2} = -q + \frac{p}{q}$

Comme $p = \frac{1}{3}$ alors $q = 1-p = \frac{5}{6}$ donc $E(Y) = -\frac{5}{6} + \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = -\frac{5}{6} + \frac{1}{5} = \frac{-19}{30}$

On a donc $\boxed{E(Y) = \frac{-19}{30}}$

Autre méthode : $E(Y) = -1 \times P(X=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = -P(X=0) + E(X)$
$E(Y) = -P(X=0) + E(X+1-1) = -P(X=0) + E(X+1) - 1 = -q + \frac{1}{p} - 1 = -q + \frac{1-p}{p} = -q + \frac{q}{p}$
et on finit pareil ...

3°) a) et 3°) b)

```
import random as rd
def exp():
    n=0
    nb_choisi=rd.randint(1,6)
    while rd.randint(1,6)==nb_choisi:
        n=n+1
    if n==0:
        return -1
    return n

def MOYn(n):
    S=0
    for i in range(n):
        S=S+exp()
    return S/n
```

Enoncé, Exercice v.a.11

Considérons un couple de variables aléatoires (X, Y) qui suit une loi uniforme sur $\{(0;1);(0;-1);(1;0);(-1;0)\}$.

a) Calculer la covariance de (X, Y)

b) X et Y sont-elles des variables aléatoires indépendantes ?

Correction

a) On fait un tableau résumant la loi du couple (X, Y) grâce au données de l'énoncé.
Comme il y a quatre valeurs possibles pour (X, Y) et que la loi est uniforme, on a des probabilités de $\frac{1}{4}$

Y \ X	-1	0	1
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

On déduit de ce tableau que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{-1;0;1\}$

En appliquant la formule des probabilités sur le système complet d'événements $(Y = -1, Y = 0, Y = 1) = (Y = y)_{y \in Y(\Omega)}$ on obtient : $\forall x \in X(\Omega)$

$$P(X = x) = P(X = 1 \cap Y = -1) + P(X = 1 \cap Y = 0) + P(X = 1 \cap Y = 1)$$

ce qui revient à sommer les lignes du tableau ...

De même, sur les colonnes pour Y, on a alors le tableau suivant :

Y \ X	-1	0	1	
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

La loi de X est alors donnée par : $X(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$ et le tableau suivant :

$k \in X(\Omega)$	-1	0	1
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On remarque que Y suit la même loi que X.

On a alors : $E(X) = E(Y) = -1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = 0$

On remarque que dans tous les cas $XY = 0$, donc $E(XY) = 0$

Comme, par la formule du cours $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ alors on en déduit $\boxed{cov(X, Y) = 0}$

b) On a $P(X = 0 \cap Y = 0) = 0$ et $P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
Donc $P(X = 0 \cap Y = 0) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 0)$ et donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$ (bien que $cov(X, Y) = 0$)

Enoncé, Exercice v.a.12

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On en tire deux et l'on note X le premier numéro tiré, Y le second.
a) Déterminer la loi conjointe et les lois marginales dans le cas d'un tirage avec remise.
b) Déterminer la loi conjointe et les lois marginales dans le cas d'un tirage sans remise.
c) Que peut-on en conclure ?

Correction

a) On remarque déjà que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1; 2; 3\}$
Comme tout les tirages sont supposés équiprobables (du moins c'est ce que laisse entendre l'énoncé) et comme il y a neuf tirages possibles alors on obtient le tableau suivant (mêmes arguments que l'exercice précédent) :

Y \ X	1	2	3	
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

La loi du couple est donnée par :
$X(\Omega) \times Y(\Omega) = [\![1;3]\!]^2$ et $\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ $\;P(X = i \cap Y = j) = P(X = i, Y = j) = \frac{1}{9}$

X et Y suivent une loi uniforme sur $[\![1;3]\!]$

b) Cette fois les événements $(X = i \cap Y = i)$ sont impossibles donc de probabilité nulle.
Il est directe de voir que X suit une loi uniforme sur $[\![1;3]\!]$
Pour calculer $P(X = i \cap Y = j)$ (pour $i \neq j$) on remarque que $Y|_{X=i}$ (Y sachant $X = i$) suit une loi uniforme sur $[\![1;3]\!] \backslash \{i\}$
On a donc pour $i \neq j$:
$P(Y = j | X = i) = \frac{1}{2} = \frac{P(X=i \cap Y=j)}{P(X=i)}$ donc $P(X = i \cap Y = j) = \frac{1}{2} P(X = i) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
On en déduit le tableau :

Y \ X	1	2	3	
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

Le tableau ci-dessus permet d'avoir la loi du couple et les lois conjointes.

La loi du couple est donnée par :
$X(\Omega) \times Y(\Omega) = [\![1;3]\!]^2$ et $\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$
$P(X = i \cap Y = j) = P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{6} \text{ si } i \neq j \\ 0 \text{ si } i = j \end{cases}$

X et Y suivent une loi uniforme sur $[\![1;3]\!]$

c) On a donc deux exemples ou X et Y ont les mêmes lois conjointes, mais ou les lois du couple sont différentes.
Les lois conjointes ne permettent donc pas de déterminer la loi du couple.

Remarques : ce n'était pas demandé ici, mais on peut remarquer que dans le cas a) les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors que dans le b) elles ne le sont pas.
On a aussi, dans le cas du a) : $cov(X,Y) = 0$ et dans le cas du b) : $cov(X,Y) = \frac{11}{3} - 2^2 = \frac{-1}{3} \neq 0$

Enoncé, Exercice v.a.13

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\frac{X_n}{n}$ approche p.
a) Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?
b) Démontrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $P(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$
c) En déduire une condition sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Correction

a) Le prélèvement des n pièces correspond à n épreuves de Bernoulli successives (défectueuse =succès) dont on compte le nombres de succès.
On en déduit que X_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p)
D'après le cours $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = np(1-p)$

b) On considère $S_n = \frac{X_n}{n}$, alors d'après le a) :
$E(S_n) = \frac{E(X_n)}{n} = \frac{np}{n} = p$ (par linéarité de l'espérance)
$V(S_n) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{p(1-p)}{n}$ (par propriété de la variance)
c) Soit $\epsilon > 0$, on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n :

$$P(|S_n - E(S_n)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\epsilon^2} \Leftrightarrow P(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

On a pas tout a fait ce qu'il faut, étudions la fonction $a(p) = p(1-p)$ sur $[0; 1]$
a est dérivable et $a'(p) = 1 - p - p = 1 - 2p$

On en déduit le tableau de variations suivant :

p	0		$\frac{1}{2}$		1
$a(p)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

On en déduit que $0 \leq a(p) = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$

Reporté dans l'inégalité ci-dessus : $P(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$

c) Notons A l'événement : $\frac{X_n}{n}$ est une valeur approchée de p à 10^{-2} près.
Alors $A = \left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 10^{-2}$

On vient de voir que $P(\overline{A}) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$ avec $\epsilon = 10^{-2}$
et on veut $P(A) \geq \frac{95}{100} \Leftrightarrow 1 - P(\overline{A}) \geq \frac{95}{100} \Leftrightarrow P(\overline{A}) \leq \frac{5}{100}$

Donc si $\frac{1}{4n\epsilon^2} \leq \frac{5}{100}$ on est dans les conditions voulues.
On a donc $100 \leq 20n\epsilon^2 \Leftrightarrow n \geq 50000$

Bilan : pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95% il faut que $n \geq 50000$

Enoncé, Exercice v.a.14

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi conjointe donnée par
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \quad P(X = i \cap Y = j) = \lambda ij$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
a) Déterminer la valeur de λ
b) Déterminer les lois marginales de X et de Y. Calculer leurs espérances.
c) Les variables X et Y sont-elles des variables aléatoires indépendantes ?
d) Donner la valeur de $cov(X, Y)$ et en déduire $E(XY)$.

Correction

a) $(X = i \cap Y = j)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ est un système complet d'événements donc :
$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} P(X = i \cap Y = j) = 1$
$\Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda ij = 1 \Leftrightarrow \lambda(\sum\limits_{i=1}^{n} i)(\sum\limits_{j=1}^{n} j) = 1 \Leftrightarrow \lambda(\sum\limits_{i=1}^{n} i)^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{n^2(n+1)^2}$

b) Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(Y = j)_{\in[\![1;,n]\!]}$ on a, pour $i \in [\![1;n]\!]$, $P(X = i) = \sum\limits_{j=1}^{n} P(X = i \cap Y = j)$

Donc $P(X = i) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda ij = \lambda i(\sum\limits_{j=1}^{n} j) = \frac{4}{n^2(n+1)^2} i \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2i}{n(n+1)}$

La loi de X est donc donnée par $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et $\forall i \in [\![1;n]\!] \quad P(X = i) = \frac{2i}{n(n+1)}$

Par symétrie Y suit la même loi.

c) On remarque que :
$\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad P(X = i \cap Y = j) = P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$
donc X et Y sont indépendantes.

d) Comme X et Y sont indépendantes on sait d'après le cours que $cov(X, Y) = 0$
On a alors $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$ donc $E(XY) = E(X)E(Y)$

$E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} iP(X = i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}$

On a donc, comme $E(X) = E(Y)$: $E(XY) = (\frac{2n+1}{3})^2 = \frac{(2n+1)^2}{9}$

Enoncé, Exercice v.a.15

On considère une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire une boule, on note X son numéro et on remet la boule dans l'urne. Ensuite on retire toutes les boules dont le numéro est strictement plus grand que X. On tire alors une nouvelle boule dont le numéro est noté Y. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de (X, Y).

Correction

On remarque facilement que X suit une loi uniforme sur $[\![1;4]\!]$
Donc $X(\Omega) = [\![1;4]\!]$ et $\forall i \in X(\Omega) \quad P(X = i) = \frac{1}{4}$

On peut maintenant voir que $Y(\Omega) = [\![1;4]\!]$ (si $X = 4$ on n'enlève pas de boules)

Si on tire la boule i en premier $X = i$ alors, il reste les boules de 1 à i, on en déduit que $Y|_{X=i}$ suit une loi uniforme sur $[\![1;i]\!]$

Donc $\forall j \in [\![1;i]\!]$, $P(Y = j|X = i) = \frac{1}{i}$
Donc $\frac{P(Y=j \cap X=i)}{P(X=i)} = \frac{1}{i} \Rightarrow P(X = i \cap Y = j) = \frac{1}{i}P(X = i) = \frac{1}{i}\frac{1}{4} = \frac{1}{4i}$
Si $j > i$ alors $P(X = i \cap Y = j) = 0$.
On peut résumer ceci dans le tableau suivant :

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

On a donc la loi conjointe du couple.

En sommant sur les lignes (formule des probabilités totales sur le s.c.e. associé à X), on obtient la loi de Y que l'on résumé dans le tableau ci-dessous. On a déjà dit que X suivait une loi uniforme sur $[\![1;4]\!]$

k	1	2	3	4
$P(Y = k)$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{16}$

Enoncé, Exercice v.a.16

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ.
Démontrer que $Z = X + Y$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Correction

D'après le cours la fonction génératrice de X est $g_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$
D'après le cours la fonction génératrice de Y est $g_Y(t) = e^{\mu(t-1)}$

Comme X et Y sont indépendantes alors la fonction génératrice de $X + Y$ est $g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$ et comme une loi est caractérisée par sa fonction génératrice alors on reconnaît que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$