Chapitre 22 : Calcul différentiel

Dans ce chapitre p désignera un entier non nul (en pratique $p = 2$ ou $p = 3$).
On notera $B = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, et on décomposera les vecteurs de $\mathbb{R}^p$ sous la forme : $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$
On notera $<,>$ le produit scalaire dans la base canonique, et on notera $||.||$ la norme de $\mathbb{R}^p$ associée au produit scalaire canonique.
Si $p = 2$, on notera plutôt (x, y) les coordonnées dans B, si $p = 3$, on notera plutôt (x, y, z) les coordonnées dans B.

1 Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

1.1 Fonctions coordonnées

Dans ce chapitre on va étudier des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On peut écrite $\forall x \in U \ , \ f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$

Remarque. *Le cas ou $p = 1$, une seule variable au départ à déjà été vu.*

Définition. *Les application $(f_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ sont appelées applications coordonnées de f*

1.2 Rappel sur la continuité

Rappel : f est continue en $a \in U$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ , \ \forall x \in \Omega \ , \ ||x - a|| \leq \eta \Rightarrow ||f(x) - f(a)||_1 \leq \epsilon$

Remarque. *$||.||_1$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et on pourrait prendre une norme quelconque sur $\mathbb{R}^p$ puisque en dimension finie les normes sont équivalentes.*

Rappel : f est continue en $a \in \Omega$ si et seulement si $\forall i \in [\![1;n]\!]$, f_i est continue en a

Remarque. *Tout se passe bien coordonnée par coordonnée à l'arrivée, au départ c'est un autre problème.*
C'est pour cela que par la suite on considérera le cas $n = 1$.
On étudie donc désormais une fonction de Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ (qui peut être remplacé par K ou $\mathbb{C}$)

1.3 Applications partielles

1.3.1 Définition

Définition. *Soit $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \Omega$.*
Pour $i \in [\![1;p]\!]$ on peut alors poser : $f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_p)$ qui est définie, au moins au voisinage de a_i
Les fonctions $f_{a,i}$ sont alors des fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, fonctions que l'on sait bien étudiée.
Les applications ainsi définies sont appelées applications partielles de f au point a.

Remarques. *Comme leurs noms l'indiquent, les applications partielles ne donnent que des renseignements partiels sur f. Il y en a p en un point a.*

1.3.2 Exemple

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Donner les applications partielles en $(0, 0)$,

1.4 Interprétation des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

2 Dérivées partielles d'ordre 1

2.1 Dérivée en un point selon un vecteur

2.1.1 Définition

Définition. *Soit $a \in \Omega$ et V un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.*
Alors, on dit que f admet une dérivée partielle en a selon le vecteur V
si et seulement la limite $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tV)-f(a)}{t}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Si elle existe, cette limite est notée $D_V f(a)$, c'est la dérivée selon V de f en a.

2.1.2 Interprétation

2.2 Dérivées partielles d'ordre 1

Définition. *Soit $a \in \Omega$ et $i \in [\![1;p]\!]$*

Alors, si f admet une dérivée partielle selon le vecteur e_i on note cette dérivée : $De_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a)$

Remarques. *$B = (e_1, \ldots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$.*
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim\limits_{t \to a_i} \frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},t,a_{i+1},\ldots,a_p)-f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_p)}{t-a_i}$

2.2.1 Notations

Si $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$ on note : $\frac{\partial}{\partial x}$ au lieu de $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ au lieu de $\frac{\partial}{\partial x_2}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ au lieu de $\frac{\partial}{\partial x_3}$

2.2.2 Exemple

2.3 Fonctions dérivées partielles d'ordre 1

Définition. *Soit $i \in [\![1..p]\!]$.*
Alors si f admet des dérivées partielles dans la direction e_i en tout point de a de Ω, on définit la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de Ω dans $\mathbb{R}$ par $\begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial x_i} & : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & a & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{array}$

Remarque. *f peut donc admettre p applications dérivées partielles d'ordre 1.*

2.4 Opérations sur les fonctions admettant des dérivées partielles

Lemme. *Soit f et g deux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ admettant une dérivée partielle selon V en $a \in \Omega$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :*
$f + \lambda g$ admet une dérivée partielle en a selon V et $D_V(f + \lambda g)(a) = D_V(f)(a) + \lambda D_V(g)(a)$
fg admet une dérivée partielle en a selon V et $D_V(fg)(a) = g(a)D_V(f)(a) + f(a)D_V(g)(a)$
Si de plus $f(a) \neq 0$ au voisinage de a alors $\frac{1}{f}$ admet une dérivée partielle en a selon V et $D_V(\frac{1}{f})(a) = \frac{-1}{f(a)^2} D_V(f)(a)$

preuve :

Remarques. *Les règles habituelles de dérivations s'appliquent.*
Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ on applique les règles de dérivation habituelles en considérant que seule la $i^{\text{ième}}$ variable bouge et en considérant les autres constantes.

Exemple. *Dérivée partielle selon y de $f(x, y, z) = cos(xyz)e^{-x}$*

3 Fonctions de classe C^1

3.1 Définition

Définition. *On dit quef est de classe C^1 sur Ω*
si et seulement si toutes ses applications dérivées partielles existent et sont continues sur Ω.

Remarques. Notations *: Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$. Alors on note $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ ou encore $C^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$.*
$C^1(\Omega, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel stable par multiplication.

3.2 Développement limité à l'ordre 1 : théorème fondamental du calcul différentiel

Théorème . *Soit f une fonction de classe C^1 de Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \Omega$. Alors f admet en a le développement limité au voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$ à l'ordre 1 suivant : $f(a+h) = f(a) + \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + o(h)$*

Remarques. *Un $o(h)$ est une fonction de la forme $||h|| \, \epsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to (0,\dots,0)} \epsilon(h) = 0$*

On a noté : $h = (h_1, \dots, h_p)$

Corollaire. *Si f est de classe C^1 sur Ω alors f est continue sur Ω*

preuve : non exigible

Exemple.

3.3 Propriété

Propriété. *Si f est de classe C^1 sur Ω. Soit $a \in \Omega$.*
Alors $\forall V \in \mathbb{R}^p$ non nul : $V = \sum\limits_{i=1}^{p} v_i e_i \Rightarrow D_V f(a) = \sum\limits_{i=1}^{p} v_i \partial_i f(a) = \sum\limits_{i=1}^{p} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

preuve :

3.4 Différentielle

Définition. *Soit f une fonction de classe C^1 de Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \Omega$.*

On appelle différentielle de f en a l'application suivante : $\begin{array}{cccc} df(a) & : & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (h_1, \dots, h_p) & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \end{array}$

Remarques. *C'est une forme linéaire.*
On peut noter : $\begin{array}{ccccc} df & : & \Omega & \longrightarrow & L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \\ & & a & \mapsto & df(a) \end{array}$ *qui est appelée différentielle de f, mais c'est HP*

3.5 Gradient

On remarque que si on note $<,>$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$, alors, avec les notations précédentes :

$$f(a+h) = f(a) + < \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} > + o(h)$$

L'application $df(a)$ étant une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ on sait qu'il existe un unique vecteur W tel que $df(a)(h) = < W, h >$, on notera donc $df(a)(h) = df(a).h$ et on donne la définition suivante :

Définition. *Soit f une fonction de classe C^1 de Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \Omega$.*
Alors on pose $\nabla f(a)$ l'unique vecteur de $\mathbb{R}^p$ tel que : $\forall h \in \mathbb{R}^p$, $df(a)(h) = < \nabla f(a), h >$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ $(e_1, \dots, e_p)$ on a : $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$

On a donc le DL d'ordre 1 : $\boxed{f(a+h) = f(a) + < \nabla f(a), h > + o(||h||)}$

3.6 Règle de la chaîne

3.6.1 Dérivation selon un arc

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ et $\gamma \in C^1(I,\mathbb{R}^p)$ tel que $\gamma(I) \subset U$.*

Alors $f \circ \gamma$ est de classe C^1 sur I et en notant $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))$ on a :
$\forall t \in I \ , \ (f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)).\gamma'(t) = \sum\limits_{i=1}^{p} \partial_i f(\gamma(t)) x_i'(t) = \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) x_i'(t)$

preuve (et interprétation) :

3.6.2 Fonction constante sur un ouvert convexe

Théorème . *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.*

Alors : $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est constante sur Ω
si et seulement si f est de classe C^1 sur Ω et $\forall a \in \Omega \ , \ df(a) = 0$

preuve :

3.6.3 Dérivation en chaîne

Théorème . *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^p$.*
Φ une application de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}^p$ telle que $\Phi(U) \subset V$
Soit f une application de classe C^1 de V dans $\mathbb{R}$.
On note $\forall (u_1, \ldots, u_n) \in U \ \Phi(u) = (x_1(u), \ldots, x_p(u))$.

Alors $g = f \circ \Phi$ est une application de classe C^1 sur U et $\forall u \in U \ , \ \forall i \in [\![1;n]\!] \ , \ \frac{\partial g}{\partial u_i}(u) = \sum\limits_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\Phi(u)) \frac{\partial x_j}{\partial u_i}(u)$

Remarque. *Notations abusives mais pratique : $\frac{\partial g}{\partial u_i} = \sum\limits_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}$*

preuve :

3.6.4 Exemples

exemple 1

Soit Ω et U deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, soit f une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$. Soit φ une application de classe C^1 de U dans Ω. On note $\forall (u,v) \in U \ \varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$.
On pose $g = f \circ \varphi$, on a donc $\forall (u,v) \in U \ \ g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.
Alors g est de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ et :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

Ces formules sont appelées formules de dérivation en chaîne, on peut les simplifier de la manière suivante :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

exemple 2 : coordonnées polaires

4 Fonctions de classe C^2

4.1 Définitions générales

Si la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ est dérivable par rapport à x_j en tout point a de Ω, alors on pose : $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ est appelée dérivée partielle d'ordre 2 de f au point a.

4.2 Applications de classe C^2

Définition. *On dit qu'une application f définie sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^p$ est de classe C^2 sur Ω si et seulement si toutes ses applications dérivées partielles secondes sont continues sur Ω.*

Remarques. *On dit que f est de classe C^0 sur Ω si f est continue sur Ω.*
On peut aussi dire que f est C^2 si toutes ses dérivées partielles premières sont de classe C^1.
Si f est d'une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, f peut admettre 4 dérivées partielles secondes :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ *notée* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$ *notée* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *notée* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *notée* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

4.3 Opérations sur les fonctions de classe C^2

Notations : Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$. Alors on note $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ ou encore $C^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}$.

Lemme. *Soit $(f, g) \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + \lambda g \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $fg \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$*

preuve : (idem C^1)

Remarque. *Autrement dit $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel stable par multiplication.*

4.4 Théorème de Schwarz

Théorème . *Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$ et f une application* **de classe** C^2 *de Ω dans $\mathbb{R}$.*
Alors $\forall a \in \Omega$, $\forall (i, j) \in [\![1; p]\!]^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

preuve : HP

4.5 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

4.5.1 Matrice Hessienne

Définition. *Soit f une application de classe C^2 d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.*

Alors, pour tout a de Ω on note $H_f(a)$ la matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de (i, j)ième coefficient $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$
$H_f(a)$ est appelée matrice Hessienne de f en a.

Remarque. *On remarque, avec le théorème de Schwarz que $H_f(a)$ est symétrique réelle.*

4.5.2 Formule de Taylor-Young

Théorème . *Soit f une application de classe C^2 d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.*

Alors, pour tout $a \in \Omega$ et h au voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$: $f(a + h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(||h||^2)$

preuve : HP

4.5.3 Cas particulier d'une fonction de 2 variables

$$f(x_0 + h, y_0 + k)$$
$$= f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{1}{2}[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)] + o(||(h, k)||^2)$$

5 Extremums d'une fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

5.1 Extremum local

Définitions. *Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$. Soit f une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$. Alors on dit que : f admet un minimum local en a si et seulement si $\exists r > 0\ ,\ x \in \mathring{B}(a,r) \cap \Omega \Rightarrow f(a) \leq f(x)$*
f admet un maximum local en a si et seulement si $\exists r > 0\ ,\ x \in \mathring{B}(a,r) \cap \Omega \Rightarrow f(a) \geq f(x)$

5.2 Extremum global

Définitions. *Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$. Soit f une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$.*
Alors on dit que : f admet un minimum global sur Ω si et seulement si $\forall x \in \Omega\ ,\ f(a) \leq f(x)$
f admet un maximum global sur Ω si et seulement si $\forall x \in \Omega\ ,\ f(a) \geq f(x)$

5.3 Point critique

Définition. *Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$. Soit f une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$. Alors on dit que a est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(a) = 0_E \Leftrightarrow \forall i \in [\![1;n]\!]\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

5.4 Deux théorèmes de recherche d'extremums

Théorème . *1*
Si une fonction de classe C^1 sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est **un point critique.**

Remarque. *La réciproque est fausse ! !*
Par exemple $(0,0)$ est un point critique en $(0,0)$ de $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $(0,0)$ n'est pas un extremum local de f.

preuve :

Théorème . *2*
Si une fonction de classe C^1 sur une partie fermée bornée Ω de $\mathbb{R}^n$ alors f admet un maximum (resp. minimum) global et ce maximum (resp. minimum) est atteint soit à l'intérieur de Ω, en un point critique, soit sur la frontière de Ω.

preuve :

5.5 Utilisation de la Hessienne

5.5.1 Théorème général

Théorème . *Si f est une fonction de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si a* **est un point critique** *de f alors :*
- si $H_f(a) \in S_n^{++}$ alors f atteint un minimum local strict en a
- si $H_f(a) \notin S_n^{+}$ alors f n'a pas de minimum en a

preuve :

Remarques. *En considérant $-f$ on peut avoir la même chose avec maximum.*

5.5.2 Cas de la dimension 2

Théorème . *Si f est une fonction de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si a* **est un point critique** *de f alors :*

- si $\begin{cases} det(H_f(a)) > 0 \\ tr(H_f(a)) > 0 \end{cases}$ alors f atteint un minimum local strict en a

- si $\begin{cases} det(H_f(a)) > 0 \\ tr(H_f(a)) < 0 \end{cases}$ alors f atteint un maximum local strict en a

- si $det(H_f(a)) < 0$ alors f n'a pas de minimum ou de maximum en a

preuve

5.6 Exemple

5.6.1 Exemple 1

Recherche des extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - xy + x + y$

5.6.2 Exemple 2

Recherche des extremums globaux sur $[-2, 2] \times [-1, 1]$ de $f : (x, y) \mapsto x^2y + xy$

6 Applications géométriques

6.1 Courbes du plan définie par une équation cartésienne

6.1.1 Cas particulier

Rappel : Si g est une fonction d'une partie I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors on pose : $\Gamma = \{(x, y)\ ,\ x \in I \text{ et } y = g(x)\}$.
Γ est la représentation graphique de g. On dit aussi que c'est la courbe d'équation cartésienne $y = g(x)$.

6.1.2 Généralisation

Définition. *Soit f une fonction de classe C^1 définie de U, une partie de $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{R}$.*
Alors on pose : $\Gamma = \{(x, y) \in U\ ,\ f(x, y) = 0\}$.
On dit que Γ est la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$

Remarques. *Plus généralement les courbes d'équation cartésienne $f(x, y) = \lambda$ sont appelées lignes de niveau de f*
$y - g(x) = 0$ est la courbe représentative de g.
Exemples : $2x + y = -3$ est une droite, $x^2 + y^2 = 1$ est l'équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon 1.

6.1.3 Points réguliers

Définition. *En gardant les mêmes notations. Soit $(x, y) \in \Gamma$. Alors on dit que :*
(x, y) est un point régulier de Γ si et seulement si $\nabla(f)(x, y) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$

6.1.4 Tangente en un point régulier

Théorème . *Avec les mêmes notations. Si (x, y) est un point régulier de Γ alors la droite passant par (x, y) et admettant $\nabla(f)(x, y)$ comme vecteur normal est appelée tangente à Γ au point (x, y).*

preuve et dessin :

Corollaire. *Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau et est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.*

Interprétation avec le DL de f à l'ordre 1

6.1.5 Exemple

$\Gamma : x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 = 0$, interprétation, tangente en un point

6.2 Surface définie par une équation cartésienne

6.2.1 Définition

Définition. *Soit f une fonction de classe C^1 sur U une partie de $\mathbb{R}^3$.*
On pose $\Sigma = \{(x, y, z) \in U\ /\ f(x, y, z) = 0\}$.
On dit que Σ est la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$.

6.2.2 Cas particulier

Si on a une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on peut poser $\begin{array}{cccc} F & : & U \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y, z) & \mapsto & z - f(x, y) \end{array}$
Si on note Σ la surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x, y)$
alors les ensembles $\Gamma_\lambda = \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R}\ /\ F(x, y, z) = 0 \text{ et } z = \lambda\}$ sont les translatés des ensembles $\gamma_\lambda = \{(x, y) \in U\ /\ f(x, y) = \lambda\}$ qui sont appelés lignes de niveaux de f ou lignes de niveaux de Σ.

6.2.3 Points réguliers

Définition. *Avec les notations précédentes. On dit que :* $(x, y, z) \in \Sigma$ *est un point régulier de* Σ *si et seulement si* $\nabla f(x, y, z) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

6.2.4 Plan tangent

Définition. *Avec les notations précédentes. Si* $(x, y, z) \in \Sigma$ *est un point régulier de* Σ *alors on appelle plan tangent à* Σ *au point* (x, y, z) *le plan passant par* (x, y, z) *et admettant* $\nabla(f)(x, y, z)$ *comme vecteur normal.*

6.2.5 Exemple

$\Sigma : x^2 + y^2 - z^2 = 1$, plan tangent en $A(3, 4, 5)$

6.3 Courbe tracée sur une surface

6.3.1 Cadre

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et Σ la surface d'équation cartésienne $z = f(x, y)$
Soit $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(I) \subset U$ et φ de classe C^1. On note $\varphi(t) = (x(t), y(t))$

Alors on dit que $\Gamma = \{(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))\ ,\ t \in I\}$ est une courbe tracée sur Σ

6.3.2 Lemme

Lemme. *Avec les notations ci-dessus, la tangente à* Γ *en* M *est incluse dans le plan tangent à* Σ *en* M

Preuve :

7 Compléments : équations aux dérivées partielles

Sommaire