

Feuille d'exercices n°65 : Révisions

Exercice 486. E3A PSI 2020 : EXERCICE 4

Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base \mathcal{B} : $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans \mathbb{R} , linéaire par rapport à chacune des variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E . Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ .
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E .
3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ .
4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que (\vec{i}, \vec{k}) soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.
5. Expliciter la matrice de f dans la base (\vec{i}, \vec{k}) . Préciser la nature de f .
6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \text{id}_E$?

Exercice 487. On pose $P = nX^{n+1} - (n+1)aX^n + a^{n+1}$ avec $a \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que $(X - a)^2$ divise P

b) (★) Déterminer le quotient de P par $(X - a)^2$.

Exercice 488. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé simple de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que P' est scindé simple.

Exercice 489. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$

Exercice 490. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$

Exercice 491. Montrer la convergence de $S = \sum_{n=2}^{+\infty} n \exp(-\sqrt{n})$

Exercice 492. Montrer la convergence et calculer $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!}$