

## Feuille d'exercices n°64 : chap. 22 calcul différentiel

**Exercice 486.** Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire canonique et du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on considère  $\Gamma$  la courbe d'équation cartésienne :  $8x^2 - 12xy + 17y^2 = 20$

- Montrer que l'équation cartésienne de  $\Gamma$  peut s'écrire :  $(x \ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  avec  $A \in M_2(\mathbb{R})$  une matrice symétrique réelle.
- Diagonaliser  $A$  dans une base orthonormale  $(\vec{u}, \vec{v})$ .
- Déterminer l'équation de  $\Gamma$  dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
- Tracer  $\Gamma$  en utilisant une analogie avec un cercle.

**Exercice 487.** Soit  $\Sigma$  la surface d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 = 1 - z^4$

- Etudier suivant les valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$  les lignes de niveaux  $\Gamma_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, \lambda) \in \Sigma\}$
- Etudier  $\Gamma = \Sigma \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$
- Tracer  $\Gamma$
- En déduire l'allure de  $\Sigma$

**Exercice 488.** a) Même exercice que ci-dessus avec  $\Sigma$  d'équation :  $x^2 + y^2 = \cos(z)$ .

- Même exercice que ci-dessus avec  $\Sigma$  d'équation :  $x^2 + y^2 = 1 + \cos(z)$ .
- Même exercice que ci-dessus avec  $\Sigma$  d'équation :  $x^2 + y^2 = 1 - z^2$ .
- Même exercice que ci-dessus avec  $\Sigma$  d'équation :  $x^2 + y^2 = 1 - z^3$ .
- Même exercice que ci-dessus avec  $\Sigma$  d'équation :  $x^2 + y^2 = |z|$ .

**Exercice 489.** Soit  $\Sigma$  la surface d'équation  $x^2 + 4xy - 4xz + 4y^2 - 8yz + 4z^2 + 6x - 6y - 3z = 0$

- Déterminer  $A \in M_3(\mathbb{R})$ , symétrique, pour que  $\Sigma$  ait pour équation :

$$(x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 6x - 6y - 3z = 0$$

- Diagonaliser  $A$  dans une base orthonormée  $B' = (e_1, e_2, e_3)$
- On note  $(X, Y, Z)$  les coordonnées dans le repère  $(O, B')$   
Exprimer  $X, Y$  et  $Z$  en fonctions de  $x, y$  et  $z$ .
- Donner l'équation de  $\Sigma$  dans le repère  $(O, B')$
- Dessiner grossièrement l'allure de  $\Sigma$

**Exercice 490.** Soit  $\Sigma$  la surface d'équation cartésienne  $z = xy$ .

- Montrer que tous les points de  $\Sigma$  sont réguliers.
- Montrer que  $A(2, 3, 6) \in \Sigma$  et déterminer équation cartésienne de  $P_A$  le plan tangent à  $\Sigma$  en  $A$ .
- Soit  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  un point de  $\Sigma$ .  
Déterminer une équation cartésienne de  $P_0$  le plan tangent à  $\Sigma$  en  $M_0$
- (\*) Déterminer  $\Gamma$  l'ensemble des points de  $\Sigma$  en lesquels le plan tangent contient la droite  $D$

$$\text{d'équations } \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$