

Feuille d'exercices n°63 : chap. 22 calcul différentiel

Exercice 481. Soit φ une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} ; on définit la fonction g sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $g(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

1°) a) Justifier que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles premières en fonction de φ' .

1°) b) Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y)$ en fonction de φ' et φ'' .

2°) Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle :

$$(1) \Leftrightarrow (1 + t^2)x''(t) + 2tx'(t) = t$$

3°) On veut déterminer les fonctions φ pour lesquelles g vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{y}{x^3}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

a) Montrer que si g vérifie (2) alors φ vérifie l'équation différentielle (1).

b) En déduire l'expression de φ puis celle de g .

c) Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus sont effectivement solutions de (2).

Exercice 482. On donne le point $C(2, -3)$ et (D) la droite d'équation $x - 4y + 5 = 0$

a) Déterminer la distance de C à (D) .

b) Déterminer par des équations cartésiennes la droite D_1 passant C et parallèle à (D) .

c) Déterminer par des équations cartésiennes la droite D_2 passant C et perpendiculaire à (D) .

Exercice 483. On donne le point $\Omega(2, 3)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du cercle Γ de centre Ω et passant par $O(0, 0)$

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à Γ en O .

Exercice 484. On considère les points $A(0, 0)$, $B(10, 0)$ et $C(2, 6)$.

a) Déterminer G le centre de gravité de (ABC) .

b) Déterminer le centre Ω et le rayon du cercle circonscrit de (ABC) .

c) Déterminer H l'orthocentre de (ABC) .

d) G , Ω et H sont-ils alignés ?

Exercice 485. Dans \mathbb{R}^3 euclidien usuel. Soit $A(1, 0, 0)$, $B(2, -1, -1)$, $C(1, 1, 3)$ et $D(0, 2, 3)$.

a) Montrer que : A, B, C, D sont non coplanaires.

b) Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

c) Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .

d) Déterminer la distance de D à (ABC)

e) Déterminer la distance de D à la droite (AB) .

f) Déterminer le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .