Feuille d'exercices n°62 : chap. 22 calcul différentiel

Exercice 478. *On pose* $\Omega =]0;+\infty[\times]0;\pi[$ *et* $\forall (r,\theta)\in\Omega\ \phi(r,\theta)=(x,y)$ *avec* $x=rcos(\theta)$ *et* $y=rsin(\theta)$.
a) Déterminer $U=\phi(\Omega)$.
b) Montrer que : ϕ *est une bijection de classe* C^1 *de* Ω *dans* U *et exprimer* ϕ^{-1} *(on utilisera la fonction arccos).*
Montrer que ϕ^{-1} *est de classe* C^1.
On cherche maintenant à résoudre sur U *l'équation aux dérivées partielles :*
$(E)\Leftrightarrow x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+y^2$
c) Ecrire (E_0) *l'équation homogène associée à* (E) *et trouver une solution particulière de* (E).
On va maintenant résoudre (E_0). *On suppose que* f *est une solution de* (E_0) *et on pose* $g=f\circ\phi$.
d) Exprimer les dérivées partielles de f *en fonction de celles de* g.
e) En déduire une équation aux dérivées partielles (F) *vérifiée par* g.
f) Résoudre (F)
g) En déduire les solutions de (E_0).
h) Résoudre (E).

Exercice 479. *Soit* $c>0$. *On considère l'équation aux dérivées partielles sur* $\mathbb{R}^2$ *suivante :*

$$E\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

On pose : $\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2\quad \varphi(x,t)=(u,v)$ *avec* $u=x+ct$ *et* $v=x-ct$.
a) Montrer que φ *définie une bijection de classe* C^2 *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *et que la bijection réciproque de* φ *est* C^2.
On suppose que f *est une solution de* E. *On pose* $g=f\circ\varphi^{-1}$.
b) Calculer les dérivées partielles premières de f *en fonction de celle de* g.
c) Calculer les dérivées partielles seconde de f *en fonction de celle de* g.
d) Déterminer une équation aux dérivées partielles F *vérifiée par* g.
e) Résoudre F.
f) Résoudre E.
g) Résoudre $\begin{cases}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\\ f(0,t)=e^t cos(t)+2t\\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,t)=e^t(cos(t)-sin(t))\end{cases}$

Exercice 480. *Résoudre sur* $\mathbb{R}^2$, *en utilisant un changement de variable linéaire :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$