Feuille d'exercices n°61 : chap. 22 calcul différentiel

Exercice 470. *On pose* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 7$
Montrer que f *admet un unique point critique et que* f *atteint en ce point critique un extremum global.*

Exercice 471. *On pose* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x^3 + y^2$
Montrer que f *admet un unique point critique et que* f *n'admet pas d'extremum local.*

Exercice 472. *On pose* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y \\ g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1 \\ h(x,y) = x^3 + y^3 \\ k(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3 \end{cases}$
Etudier les extremums locaux des fonctions ci-dessus.

Exercice 473. *On pose* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = xy(1-x-y)$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \geq 0$ *et* $y \geq 0$ *et* $x + y \leq 1\}$
Déterminer les extremums globaux de f *sur* D

Exercice 474. *On pose* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x - y + x^3 + y^3$ *et* $D = [0;1]^2$
Déterminer les extremums globaux de f *sur* D.

Exercice 475. *Soit* $f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$
1°) Représenter D *et justifier que* f *admet un maximum et un minimum sur* D.
2°) Déterminer les points critiques de f *sur* D.
3°) Déterminer le minimum et le maximum de f *sur* ∂D
4°) En déduire le minimum et le maximum de f *sur* D.

Exercice 476. *On cherche à trouver le périmètre maximal d'un triangle inscrit dans un cercle. Par homothétie et translation on considère que le cercle considéré est le cercle de centre O et de rayon 1.*
a) Si A *est le point d'affixe complexe 1 et si* B *est le point d'affixe* $e^{i\theta}$, *calculer la distance* AB.
b) Montrer que le problème revient à chercher le maximum de la fonction :

$$f(\alpha,\beta) = 2sin(\tfrac{\alpha}{2}) + 2sin(\tfrac{\beta}{2}) + 2sin(\tfrac{\alpha+\beta}{2}) \text{ sur } D = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} 0 \leq \alpha \\ 0 \leq \beta \\ \alpha + \beta \leq 2\pi \end{cases} \}$$

c) Résoudre le problème posé.

Exercice 477. *Soit* g *une fonction de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* C^1.
On pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = g(2x - y, x + 3y)$.
On veut résoudre l'équation aux dérivées partielles : $(EDP) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$
On notera $u = 2x - y$ *et* $v = x + 3y$. *On a donc* $g(u,v) = f(x,y)$.
On notera $\frac{\partial g}{\partial u}$ *et* $\frac{\partial g}{\partial v}$ *les dérivées partielles de* g.
a) Montrer que f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et calculer les dérivées partielles de* f *en fonction de celles de* g.
b) Ecrire (EDP) *en fonction de* g *et résoudre l'équation obtenue en* g.
c) Donner des solutions de (E)