Feuille d'exercices n°60 : chap. 22 calcul différentiel

Exercice 464. ($\star$)

On pose $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \leq 0 \\ exp(\frac{-1}{t}) \ si \ t > 0 \end{cases}$

a) Montrer que g *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$

On pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad G(x,y) = \begin{cases} 0 & si \ (x,y) = (0,0) \\ exp(\frac{-1}{x^2+y^2}) & si \ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

b) Montrer que G *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$

Exercice 465. *Soit* f *une fonction de classe* C^1 *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$.
On définit pour tout $t \in \mathbb{R} \quad g(t) = f(tx, ty)$.
a) Montrer que g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer sa dérivée.*
On suppose désormais que $\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \quad f(tx,ty) = tf(x,y)$
b) Montrer que : $\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)$
c) Montrer qu'il existe $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \alpha x + \beta y$

Exercice 466. *Soit* $n \geq 1$ *et* $||.||$ *la norme euclidiene canonique de* $\mathbb{R}^n$.

Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & ||x||^2 \end{array}$

Etudier le le gradient de f.

Exercice 467. *Soit* $n \geq 1$ *et* $||.||$ *la norme euclidiene canonique de* $\mathbb{R}^n$.

Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & ||x|| \end{array}$

Etudier le le gradient de f.

Exercice 468. *a) Trouver* f *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *telle que :* $\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{pmatrix}$

b) Trouver g *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *telle que :* $\nabla(g)(x,y) = \begin{pmatrix} e^x y \\ e^x + 2y \end{pmatrix}$

Exercice 469. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$, *telle qu'il existe* $k \in]0,1[$ *vérifiant :*
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq k$
Soit l'application $\quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x,y) \longmapsto \big(x + f(y), \ y + f(x)\big)$
a) Montrer que g *est injective.*
b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *et soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer l'équivalence : $\quad g(x,y) = (a,b) \iff \begin{cases} x = a - f\big(b - f(x)\big) & (i) \\ y = b - f(x) & (ii) \end{cases}$

On considère la suite réelle (x_n) *définie par :* $x_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = a - f\big(b - f(x_n)\big)$
c) Montrer que la série de terme général $x_{n+1} - x_n$ *converge.*
d) En déduire que la suite (x_n) *converge, et montrer que sa limite* ℓ *est une solution de (i).*
e) En déduire que le couple (a,b) *admet au moins un antécédent par* g
f) En déduire que g *est une bijection de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$