Feuille d'exercices n°59 : chap. 22 calcul différentiel

Exercice 459. *On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3+3x^2y}{7x^2+3y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Montrer que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad |f(x,y)|\leq \left|\frac{xy}{3}\right|+\left|\frac{3y}{7}\right|$
b) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

Exercice 460. *On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2y^2}{x^2+7y^4} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Calculer $f(x,ax)$ pour $a\in\mathbb{R}$ et $x\neq 0$.
b) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$

Exercice 461. *On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Montrer que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad |xy|\leq\frac{x^2+y^2}{2}$
b) Montrer que f est continue en $(0,0)$
c) Calculer pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ les dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
d) Montrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ et les calculer.
e) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$
f) Montrer que les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ *existent et calculer les.*
g) f est-elle de classe C^2 ?

Exercice 462. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2*
On considère la fonction F de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} & si\ x\neq y\\ f'(x) & si\ x=y\end{cases}$$

1°) Rappeler le théorème des accroissements finis
2°) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$
3°) Soit $a\in\mathbb{R}$. Montrer que F admet des dérivées partielles au point (a,a) et calculer $\vec{grad}(f)(a)$
4°) $(\star)$ F est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 463. $(\star)$ *Calculer la divergence et le laplacien en coordonnée polaire.*