Exercices corrigés du chapitre 22 : Calcul différentiel

Enoncé, Exercice 22.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

a) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

b) Que dire de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$?

c) f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Correction

a) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = |x| \frac{x^2}{x^2+y^2}$

Mais $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ car $x^2 \leq x^2 + y^2$ et donc $|f(x,y)| \leq |x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

On en déduit $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$ et donc $\boxed{f \text{ est continue en } (0,0)}$

b) Pour $t \neq 0$ on a : $\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)-0}{t} = \frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$

On a donc $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ existe et } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1}$

c) f est clairement C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et pour $(x,y) \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)-2xx^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$

et donc $\boxed{f \text{ n'est pas de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

Enoncé, Exercice 22.2

Donner le développement limité à l'ordre 2 en $(1, \pi)$ de $f(x, y) = x^2y + xcos(y)$

Correction

f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy + cos(y) \\ x^2 - xsin(y) \end{pmatrix}$

De plus, la Hessienne de f vaut : $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x - sin(y) \\ 2x - sin(y) & -xcos(y) \end{pmatrix}$

Donc $f(1, \pi) = \pi - 1$, $\nabla(f)(1, \pi) = \begin{pmatrix} 2\pi - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $H_f(1, \pi) = \begin{pmatrix} 2\pi & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

On utilise la formule du cours qui donne, pour (h, k) au voisinage de $(0, 0)$:

$$f(1 + h, \pi + k) = f(1, \pi) + < \nabla(f)(1, \pi), (h, k) > + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H_f(1, \pi) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(||(h, k)||^2)$$

$$\Rightarrow f(1 + h, \pi + k) = \pi - 1 + (2\pi - 1)h + k + \frac{1}{2}(2\pi h^2 + 4hk + k^2) + o(||(h, k)||^2)$$

Le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(1, \pi)$ est donc

$$\boxed{f(1 + h, \pi + k) = \pi - 1 + (2\pi - 1)h + k + \pi h^2 + 2hk + \frac{1}{2}k^2 + o(||(h, k)||^2)}$$

Enoncé, Exercice 22.3

On pose : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y - 3x^2 + y^2 - 3y$

Déterminer les points critique de f et faire une étude locale de ces points.

Correction

On remarque que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

(x, y) point critique de f

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6xy - 6x = 0 \\ 3x^2 + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x(x + y - 1) = 0 \\ 3x^2 + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y - 3 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 - x \\ 3x^2 + 2(1 - x) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 - x \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\boxed{f \text{ admet trois points critiques : } A(0, \frac{3}{2}),\ B(1, 0) \text{ et } C(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3})}$

Pour faire une étude locale on va passer par la matrice Hessienne de f.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $H(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}(x,y)=\begin{pmatrix}12x+6y-6 & 6x\\ 6x & 2\end{pmatrix}$

- $H_f(A)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}det(H_f(A))=6>0\\ tr(H_f(A))=5>0\end{cases}\quad\Rightarrow f$ admet un minimum local en A
- $H_f(B)=\begin{pmatrix}6 & 6\\ 6 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow det(H_f(B))=12-36<0\Rightarrow f$ n'admet pas d'extremum local en B
- $H_f(C)=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow det(H_f(C))=0$ on ne peut pas conclure avec la Hessienne

On passe ici les calculs intermédiaires ...

On a $f(\frac{-1}{3}+h,\frac{4}{3}+h)-f(\frac{-1}{3},\frac{4}{3})\sim -2h^2>0$ pour $h\neq 0$ au voisinage de 0

On a $f(\frac{-1}{3}+h,\frac{4}{3}+4h)-f(\frac{-1}{3},\frac{4}{3})\sim 7h^2>0$ pour $h\neq 0$ au voisinage de 0

$f(\frac{-1}{3}+h,\frac{4}{3}+k)-f(\frac{-1}{3},\frac{4}{3})$ change donc de signe pour (h,k) au voisinage de $(0,0)$ et donc f n'admet pas d'extremum local en C.

Bilan : $\boxed{\begin{cases}f \text{ admet un minimum local en } A(0,\frac{3}{2})\\ f \text{ n'admet pas d'extremum local en } B(1,0)\\ f \text{ n'admet pas d'extremum local en } C(\frac{-1}{3},\frac{4}{3})\end{cases}}$

Enoncé, Exercice 22.4

Trouver les extremums globaux de $f:(x,y)\mapsto x^2y+xy$ sur $\Omega=[-2;2]\times[-1;1]$.

Correction

Tout d'abord, Ω est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ et f est une fonction de classe C^1 sur Ω, donc par théorème du cours, f est bornée sur Ω et atteint ses bornes, soit sur le bord de Ω, soit à l'intérieur de Ω en un point critique.

Cherchons d'abord les points critiques.

(x,y) point critique de f

$\Leftrightarrow \nabla(f)(x,y)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2xy+y=0\\ x^2+x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+1)=0\\ y(2x+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}$

On pose $O(0,0)$ et $A(-1,0)$, on remarque que ces points sont dans l'intérieur de Ω et que $f(O)=0$ et $f(A)=0$

On pose $B(-2;1)$, $C(2;1)$, $D(2;-1)$ et $E(-2;-1)$, ainsi le bord de Ω est le rectangle $BCDE$

Etude sur BC : On pose $\forall t\in[-2;2]\quad g(t)=f(t,1)=t^2+t$

g est dérivable et $g'(t)=2t+1$, on a donc

t	-2		$\frac{-1}{2}$		2
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	2	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$	6

Etude sur DE : On pose $\forall t \in [-2;2] \quad h(t) = f(t,-1) = -t^2 - t = -g(t)$
h est donc maximum en $\frac{-1}{2}$ pour la valeur $\frac{1}{4}$ et minimum en $t=2$ pour la valeur -6.

Etude sur CD : On pose $\forall t \in [-1;1] \quad i(t) = f(2,t) = 6t$
i est donc maximum en $t=1$ pour la valeur 6 et minimum en $t=-1$ pour la valeur -6.

Etude sur BE : On pose $\forall t \in [-1;1] \quad j(t) = f(-2,t) = 2t$
i est donc maximum en $t=1$ pour la valeur 2 et minimum en $t=-1$ pour la valeur -2.

Bilan : $\boxed{\begin{cases} f \text{ atteint son maximum au point } (2,1) \text{ et ce maximum vaut } 6 \\ f \text{ atteint son minimum au point } (2,-1) \text{ et ce minimum vaut } -6 \end{cases}}$

Enoncé, Exercice 22.5

Trouver les fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $E \Leftrightarrow 2\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$
On pourra utiliser un changement de variable linéaire.

Correction

On va utiliser un changement de variable linéaire. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$.

On pose $\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (u,v) \end{array}$ avec $\begin{cases} u = x + ay \\ v = x + by \end{cases}$

ϕ est une application linéaire de matrice, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$, donc de déterminant $b - a \neq 0$ car $a \neq b$.
ϕ est donc bijective, de plus, comme ϕ et ϕ^{-1} sont linéaires alors elles sont C^1.

Soit f une solution de E. Posons $g = f \circ \phi^{-1}$. Alors g est C^1 comme composée de fonctions C^1 et de plus $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = g(u,v)$ avec $(u,v) = (x+ay, x+by) = \phi(x,y)$ puisque $f = g \circ \phi$

Par la formule de dérivation en chaîne on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = a\frac{\partial g}{\partial u} + b\frac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$$

On reporte alors dans E :

f solution de E sur $\mathbb{R}^2$
$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 2\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$
$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 2(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}) - 3(a\frac{\partial g}{\partial u} + b\frac{\partial g}{\partial v}) = 0$
$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (2-3a)\frac{\partial g}{\partial u} + (2-3b)\frac{\partial g}{\partial v}) = 0$

Pour simplifier l'équation on choisit $a = \frac{2}{3}$ et $b = 0$ ce qui répond à la condition $a \neq b$.

On reporte dans E et on a alors :

f solution de E sur $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial g}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$

On peut faire la dernière équivalence car ϕ est bijective.

On applique alors le cours.
f solution de E sur $\mathbb{R}^2$ $\exists A \in C^1(\mathbb{R})$ $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ $g(u,v) = A(u)$

On peut revenir à f par la relation $f(x,y) = g(u,v)$ (toujours par le fait que ϕ est bijective.

$\boxed{\text{Les solutions de } E \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ s'écrivent donc } f(x,y) = A(x + \frac{2}{3}y) \text{ avec } A \in C^1(\mathbb{R})}$

Enoncé, Exercice 22.6

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la surface Σ d'équation cartésienne $x^2y - y^2 + z^2 = 4$
Montrer que $A(1,1,2)$ est un point régulier de Σ et déterminer une équation cartésienne de P le plan tangent à Σ au point A

Correction

On pose $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ $f(x,y,z) = x^2y - y^2 + z^2 - 4$ ainsi Σ a pour équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$

On calcule $f(A) = f(1,1,2) = 1 - 1 + 2^2 - 4 = 0$ donc on a bien $A \in \Sigma$

f est C^1 et $\nabla(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} (x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$\nabla(f)(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc A est un point régulier et $\nabla(f)(A)$ est bien un vecteur tangent au plan P qui a donc une équation cartésienne de la forme : $2x - y + 4z = a$ avec $a \in \mathbb{R}$
Mais $A \in P \Rightarrow 2 - 1 + 4 = a \Rightarrow a = 5$

Une équation cartésienne de P est donc : $2x - y + 4z = 5$
