Feuille d'exercices n°66 : Révisions

Exercice 493. *Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$*
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$
On pose : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P_k = (X + \lambda_k)^n$

Montrer que : $(P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}[X] \Leftrightarrow$ les λ_k sont distincts deux à deux

Exercice 494. *Soit $P = X^2 - 1$, $Q = X^2 + X$ et $R = X^2 - X$ et $S = X + 2$*

a) Montrer que $B = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
b) Déterminer les coordonnées de S dans B.

Exercice 495. *Soit r un nombre réel tel que : $r \neq 1$ et $r \neq -1$.*
On pose $I = \int\limits_0^\pi ln(1 - 2rcos(t) + r^2)$

a) Montrer que I est convergente.

b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^2 - 2cos(\theta)X + 1$

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\Big(X - exp(\frac{ik\pi}{n})\Big)\Big(X - exp(\frac{-ik\pi}{n})\Big)$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\Big(1 - 2rcos(\frac{k\pi}{n}) + r^2\Big)$
Montrer que : $P_n = \frac{r+1}{r-1}(r^{2n} - 1)$

e) Calculer I

Exercice 496. *On définit dans $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, B) = tr(A^T B)$, où $tr(A^T B)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice B.*

0°) Montrer que φ est un produit scalaire sur $M_2(\mathbb{R})$.

On note $F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \setminus \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

1) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$
2) Déterminer une base de $F^\perp$
3) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
sur $F^\perp$
4) Calculer la distance de J à F.