Feuille d'exercices n°68 : Révisions

Exercice 500. *Soit n un entier naturel non nul. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.*

On pose, pour tout $\omega \in \Omega$: $A(\omega) = \begin{pmatrix} Y(\omega) & 0 \\ 2 & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

1. *(a) Déterminer le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n}$.*
   (b) En remarquant que $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, exprimer le coefficient précédent d'une autre manière.
   (c) En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
2. *A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et c la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?*
3. *Calculer la probabilité de l'évènement $\{\omega \in \Omega \ , \ A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}$.*
   On utilisera la question 1c pour simplifier le résultat.
4. *Calculer la probabilité de l'évènement $\{\omega \in \Omega \ , \ A(\omega) \text{ est inversible}\}$.*

Exercice 501. *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes la même loi de Poisson de paramètre λ. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{X_1+\cdots+X_n}$.*

a) Trouver une constante C telle que $V(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n}$.

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : $P\Big(|Z_n - e^{-\lambda}| \geq \varepsilon\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 502. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ on considère des variables aléatoires réelles discrètes X_1, X_2,..., X_n dont les carrés ont des espérances finies.*
On note $M = \Big(Cov(X_i, X_j)\Big)_{(i,j)\in[\![1,n^2]\!]} \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit la variable aléatoire $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$.

On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que $V(X) = A^T M A$.

b) Montrer que le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{R}$ et que toutes ses valeurs propres sont positives.

Exercice 503. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.*
Montrer qu'il existe $f \in L(E)$ tel que $ker(f) = Im(f)$ si et seulement si E est de dimension paire.