Feuille d'exercices n°67 : Révisions

Exercice 497. *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 1$.*
Montrer que $H = \{P \in E\ ,\ P(1)+P'(0) = 0\}$ est un hyperplan et donner une équation cartésienne de H dans la base canonique de E.

Exercice 498. *Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant une variance et soit $a > 0$.*

a) Démontrer que, pour tout $t \geq 0$: $P\big(X - E(X) \geq a\big) \leq \frac{t^2+V(X)}{(a+t)^2}$

b) En déduire que : $P\big(X - E(X) \geq a\big) \leq \frac{V(X)}{V(X)+a^2}$

c) Démontrer l'inégalité de Cantelli : $P\big(\,|X - E(X)| \geq a\big) \leq \frac{2V(X)}{V(X)+a^2}$

d) Dans quel cas cette inégalité est-elle meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

Exercice 499. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E, tel que :*

$$u^2 - 3u + 2\mathrm{id}_E = 0 \quad (\star)$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. *L'endomorphisme u est il diagonalisable ?*
2. *Déterminer les valeurs propres possibles α et β de l'endomorphisme u. On choisira α inférieure à β.*
3. *On pose alors $v = u - \alpha\mathrm{id}_E$ et $w = u - \beta\mathrm{id}_E$.*
   (a) *Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.*
   (b) *Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.*
   (c) *Prouver que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.*
   (d) *Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.*
4. *Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?*
5. ***Application***
   Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit que l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) *Vérifier que u satisfait à la relation $(\star)$. On fera apparaître les calculs sur la copie.*
   (b) *Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question 3.*
   (c) *Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(v)$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(w)$.*
   (d) *Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.*