Mathématiques : Correction du devoir à la maison n°13

Exercice : ccINP 2024 PSI, Equivalent de Stirling

Q19) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$

Sur $]0, 1]$
Au voisinage de 0 : $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} > 0$
Donc, par la règle de l'équivalent pour les intégrales de fonctions positives :
$\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ est de même nature que $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dx$ qui est, par Riemann convergente si et seulement si $1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0$

Sur $[1; +\infty[$
Au voisinage de $+\infty$: $t^{x-1}e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ par comparaison exp-puissance et donc, comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann), alors par règle de comparaison $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int\limits_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente.

Comme $\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ convergente $\Leftrightarrow$ $\int\limits_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ convergente et $\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ convergente, alors :

$\boxed{\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \text{ est convergente si et seulement si } x > 0}$

Q20) • Soit $\epsilon > 0$ et $A > 0$. Alors par intégration par partie avec des fonctions C^1 sur $[\epsilon, A]$:
$\int\limits_\epsilon^A t^{x-1}e^{-t}dt = [\frac{t^x}{x}e^{-t}]_\epsilon^A + \int\limits_\epsilon^A \frac{t^x}{x}e^{-t}dt$
Puis comme les intégrales sont convergentes et avec les limites usuelles :

$$\underbrace{\int_\epsilon^A t^{x-1}e^{-t}dt}_{\substack{\longrightarrow \Gamma(x) \\ \epsilon\to 0 \\ A\to+\infty}} = \underbrace{\frac{A^x}{x}e^{-A}}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ A\to+\infty}} - \underbrace{\frac{\epsilon^x}{x}e^{-\epsilon}}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ \epsilon\to 0}} + \frac{1}{x}\underbrace{\int_\epsilon^A t^{x+1-1}e^{-t}dt}_{\substack{\longrightarrow \Gamma(x+1) \\ \epsilon\to 0 \\ A\to+\infty}}$$

On en déduit donc : $\boxed{\forall x > 0 \ , \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$

• Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \Gamma(n) = (n-1)!$

Initialisation pour $n = 1$:
$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+_infty} t^{1-1}e^{-t}dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = -0 + 1 = 1 = (1-1)!$
On a bien la propriété au rang 1

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n.

Alors on a $\Gamma(n) = (n-1)!$
Avec la relation trouvée en début de question 20) : $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \times (n-1)! = n! = (n+1-1)!$
On a la relation au rang $n+1$.

Conclusion : On a montrer par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \Gamma(n) = (n-1)!}$

Q21) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$

Initialisation :

Effectuons le changement de variable C^1 bijectif $u = t^2$ dans l'intégrale de Gauss qui nous est donnée.
On obtient :
$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u}\frac{1}{2\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-u}u^{-1/2}du = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-u}u^{1/2-1}du = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$

On en déduit $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
Comme pour $n = 0$ on a : $\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$, la relation voulue est bien vérifiée au rang 1.

Hérédité :

$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ on multiplie par $n+\frac{1}{2} = \frac{2n+1}{2}$
$\Rightarrow (n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{2n+1}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ on utilise le début de Q20)
$\Rightarrow \Gamma((n+1)+\frac{1}{2}) = \frac{(2n+2)}{2(n+1)}\frac{(2n+1)}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$
$\Rightarrow \Gamma((n+1)+\frac{1}{2}) = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!}\sqrt{\pi}$
La relation au rang n implique celle au rang $n+1$.

Conclusion : On a montrer par récurrence que : $\boxed{\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}}$

Q22) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\sum\limits_{k=1}^{n-1} \rho_k$
$= \sum\limits_{k=1}^{n-1} [ln(k) - \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln(t)dt]$
$= \sum\limits_{k=1}^{n-1} ln(k) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}]ln(t)dt$
$= ln(\prod\limits_{k=1}^{n-1} k) - \int\limits_{1-\frac{1}{2}}^{n-1+\frac{1}{2}} ln(t)dt$ par relation de Chasles et propriété du ln
$= ln((n-1)!) - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} ln(t)dt$
$= ln(\Gamma(n)) - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} ln(t)dt$

On a donc bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ ln(\Gamma(n)) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} ln(t)dt + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \rho_k}$

Q23) $\rho_k = ln(k) - \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln(t)dt$

On effectue le changement de variable C^1 : $u = t - k$ dans l'intégrale :

$\rho_k = ln(k) - \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ln(u+k)dt = ln(k) - \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} ln(u+k)du - \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} ln(u+k)du$

Changement de variable $t = -u$ dans la première intégrale (et $t = u$ dans la seconde).

$\rho_k = ln(k) - \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} ln(k-t)dt - \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} ln(k+t)dt$

Mais $ln(k) = 2\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} ln(k)dt$ donc

$\rho_k = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \big(2ln(k) - ln(k-t) - ln(k+t)\big)dt = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} ln(\frac{k^2}{(k-t)(k+t)})dt = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} ln(\frac{k^2}{k^2-t^2})dt = -\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} ln(\frac{k^2-t^2}{k^2})dt = -\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} ln(1-\frac{t^2}{k^2})dt$

On a bien : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ \rho_k = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} [2ln(k) - ln(k-t) - ln(k+t)]dt = -\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} ln(1-\frac{t^2}{k^2})dt}$

Q24) • Posons $\forall y \in [0,1[\ , \ A(y) = -ln(1-y)$

Alors A est dérivable sur $[0,1[$ et $A'(y) = \frac{1}{1-y} > 0$ donc A est croissante sur $[0,1[$

Comme $A(0) = 0$ on en déduit : $\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ 0 \leq -ln(1-\frac{t^2}{k^2}) \leq -ln(1-\frac{1}{k^2})$

Donc, avec Q23) : $0 \leq \rho_k \leq \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} -ln(1-\frac{1}{k^2})dt = -\frac{1}{2}ln(1-\frac{1}{k^2}) \sim \frac{1}{2k^2}$

Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente alors, par règle de comparaison, pour les séries à termes positifs on a : $\boxed{\sum \rho_k \text{ est convergente.}}$

Q25) • Pour commencer, calculons :

$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} ln(t)dt$ par intégration par parties (fonctions C^1)

$= [tln(t)]_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} t\frac{1}{t}dt$

$= (n-\frac{1}{2})ln(n-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}ln(\frac{1}{2}) - (n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})$

$= (n-\frac{1}{2})ln(n-\frac{1}{2}) - n + 1 + \frac{1}{2}ln(2)$

• De plus $\sum \rho_k$ est convergente donc $\exists C \in \mathbb{R} \ , \ \sum\limits_{k=1}^{n-1} \rho_k = C + o(1)$

• On regroupe ces deux résultats dans la relation de Q22) :

$ln(\Gamma(n))$

$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}]ln(t)dt + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \rho_k$

$= (n-\frac{1}{2})ln(n-\frac{1}{2}) - n + 1 + \frac{1}{2}ln(2) + C + o(1)$

$= (n-\frac{1}{2})ln(n(1-\frac{1}{2n})) - n + 1 + \frac{1}{2}ln(2) + C + o(1)$

$= (n-\frac{1}{2})[ln(n) + ln(1-\frac{1}{2n})] - n + 1 + \frac{1}{2}ln(2) + C + o(1)$

$= (n-\frac{1}{2})[ln(n) - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})] - n + 1 + \frac{1}{2}ln(2) + C + o(1)$

$= (n-\frac{1}{2})ln(n) - \frac{1}{2} + o(1) - n + 1 + \frac{1}{2}ln(2) + C + o(1)$

$= (n-\frac{1}{2})ln(n) - n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln(2) + C + o(1)$

En posant $c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln(2) + C$ on a bien : $\boxed{ln(\Gamma(n)) = (n-\frac{1}{2})ln(n) - n + c + o(1)}$

• En prenant l'exponentielle dans la relation ci-dessus :

$\Gamma(n) = exp((n-\frac{1}{2})ln(n))exp(-n)exp(c+o(1)) = n^{n-\frac{1}{2}}exp(-n)(exp(c)+o(1))$

Donc en prenant l'équivalent : $\boxed{\Gamma(n) \sim e^c n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}}$

Q26) Comme on admet que l'intégrale est convergente, on peut effectuer le changement de variable C^1 bijectif $u = \frac{t}{n}$ et on a : $\Gamma_n(x) = \int\limits_0^1 (nu)^{x-1}(1-u)^n(ndu)$ donc $\boxed{\Gamma_n(x) = n^x \int\limits_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du}$

Q27) Soit $x > 0$. Montrons par récurrence sur $N \in \mathbb{N}^*$ que $\Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$

Initialisation pour $n = 1$:
On utilise Q26) :
$\Gamma_1(x) = 1^x \int\limits_0^1 u^{x-1}(1-u)du = \int\limits_0^1 [u^{x-1} - u^x]du = [\frac{u^x}{x} - \frac{u^{x+1}}{x+1}]_0^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - 0 = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$

Hérédité : Par intégration par partie (toujours en partant de Q26) :

$$\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x \int\limits_0^1 u^{x-1}(1-u)^{n+1}du = (n+1)^x \Big(\underbrace{[\frac{u^x}{x}(1-u)^{n+1}]_0^1}_{=0} + \int\limits_0^1 \frac{u^x}{x}(n+1)(1-u)^n du \Big)$$
$$= (n+1)^x \frac{n+1}{x} \int\limits_0^1 u^{x+1-1}(1-u)^n du$$

Donc $\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^{x+1} \frac{1}{x} \frac{\Gamma_n(x+1)}{n^{x+1}}$
En utilisant la relation de récurrence au rang n :
$\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^{x+1} \frac{1}{x} \frac{n!}{(x+1)(x+2)...(x+n+1)} = (n+1)^x \frac{(n+1)!}{x(x+1)(x+2)...(x+n+1)}$

On a bien la relation au rang $n+2$

Conclusion : on a montrer par récurrence que : $\boxed{\forall x > 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}}$

Q28) • Dans cette question, on travaille avec $x > 0$ fixé et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{rccl} \gamma_n & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & 1_{]0,n[}(t)(1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} \end{array}$$

Ainsi $\Gamma_n(x) = \int\limits_0^{+\infty} \gamma_n(t)dt$

• Comme pour n assez grand on a $t < n$ alors :
$\gamma_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} = exp(nln(1-\frac{t}{n}))t^{x-1} = exp(n(-\frac{t}{n} + o(\frac{1}{n})))t^{x-1} = exp(-t+o(1))t^{x-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t^{x-1}e^{-t}$

On pose $\begin{array}{rccl} \gamma & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & t^{x-1}e^{-t} \end{array}$

On a donc la suite de fonctions (γ_n) qui converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction γ

• $\gamma_n(t) \leq \gamma(t)$
$\Leftrightarrow (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} \leq e^{-t}t^{x-1}$
$\Leftrightarrow (1-\frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$ on prend le ln (bijection)
$\Leftrightarrow nln(1-\frac{t}{n}) \leq -t$
$\Leftrightarrow ln(1-\frac{t}{n}) \leq -\frac{t}{n}$
Or la dernière inégalité est vraie (classique)

On a donc : $\gamma_n(t) \leq \gamma(t)$ et même : $0 \leq \gamma_n(t) \leq \gamma(t)$

• On a donc (γ_n) qui converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction γ et de plus on a l'hypothèse de domination puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in]0,+\infty[$, $|\gamma_n(t)| \leq \gamma(t)$ avec γ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$ (puisque son intégrale vaur $\Gamma(x)$) De plus γ et les γ_n sont continues par morceaux sur $]0,+infty[$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \gamma_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \gamma_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \gamma(x)dx = \Gamma(x)$$

• Bilan : $\boxed{\forall x > 0 \ , \ \lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x)}$

• Avec l'expression de Q27) on a directement : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)} = \Gamma(x)}$

Q29) • Pour $x > 0$: avec la relation de Q20)
$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)\Gamma(x+n-1) = (x+n-1)(x+n-2)\Gamma(x+n-2) = \cdots = (x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)(x)\Gamma(x)$$

Alors : $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} = \frac{(x+n-1)(x+n-2)...(x+1)(x)\Gamma(x)}{\Gamma(n)n^x}$

On utilise l'équivalent trouver en Q28) et $\Gamma(n) = (n-1)!$ trouvé en Q20)

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \underset{n=+\infty}{\sim} \frac{(x+n-1)(x+n-2)...(x+1)(x)\frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}}{(n-1)!n^x} \underset{n=+\infty}{\sim} \frac{\frac{n^x n!}{(x+n)}}{(n-1)!n^x} \underset{n=+\infty}{\sim} \frac{\frac{n^x n!}{n}}{(n-1)!n^x} \underset{n=+\infty}{\sim} 1$$

On a bien : $\boxed{\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$

• On utilise la relation ci-dessus avec $x = \frac{1}{2}$ et on a : $\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n)n^{\frac{1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

Au numérateur on utilise le résultat de la question Q21) et au dénominateur celui de la question Q25). On obtient alors $\frac{\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}}{e^c n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}n^{\frac{1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

En écrivant les factorielles avec Γ

$$\Gamma(2n+1)\sqrt{\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{2n}\Gamma(n+1)e^c n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}n^{\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow (2n)\Gamma(2n)\sqrt{\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{2n}n\Gamma(n)e^c n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}n^{\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \Gamma(2n)\sqrt{\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{2n-1}\Gamma(n)e^c n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}n^{\frac{1}{2}}$$

On réutilise Q25) et on a :
$$[e^c(2n)^{2n-\frac{1}{2}}e^{-2n}]\sqrt{\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{2n-1}[e^c n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}]e^c n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}n^{\frac{1}{2}}$$
On élimine un e^c et on factorise à droite :
$$(2n)^{2n-\frac{1}{2}}e^{-2n}\sqrt{\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{2n-1}e^{-2n}e^c n^{2n-1}n^{\frac{1}{2}}$$
On développe à gauche et on simplifie par e^{-2n} :
$$2^{2n-\frac{1}{2}}n^{2n-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{2n-1}e^c n^{2n-\frac{1}{2}}$$
On simplifie les n et les puissances de 2 :
$$2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^c$$

On a donc $\boxed{e^c = \sqrt{2\pi}}$

Remarque : reporter dans Q25) le résultat ci-dessus donne la formule de Stirling

ccINP 2018, PSI : Problème 2

Q31) On a $\forall \omega \in \Omega$, $|X(\omega)| \leq 1$, comme la variable aléatoire 1 admet une espérance alors $\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$

Q32) Théorème (Inégalité de Markov) :
Soit Y une variable aléatoire discrète réelle positive admettant une espérance.
Alors : $\forall \alpha > 0$, $\mathbb{P}(Y \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\alpha}$

preuve : On pose $A = (Y \geq \alpha)$

On remarque que : $\alpha 1_A \leq Y$, en effet, si $\omega \in A$, $(\alpha 1_A)(\omega) = \alpha \leq Y(\omega)$ par définition de A.
Si $\omega \notin A$, $(Y 1_A)(\omega) = 0 \leq Y(\omega)$ car Y est positive.

Comme l'espérance est croissante : $\mathbb{E}(\alpha 1_A) \leq \mathbb{E}(Y)$,
comme l'espérance est linéaire : $\alpha \mathbb{E}(1_A) \leq \mathbb{E}(Y)$ et comme $\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$ alors $\alpha \mathbb{P}(Y \geq \alpha) \leq \mathbb{E}(Y)$
On a bien démontrer l'inégalité de Markov

La preuve est valable que $Y(\Omega)$ soit dénombrable ou fini.

Q33) On démontre de même qu'en Q31) que $|X|$ admet une espérance et en appliquant l'inégalité de Markov on obtient : $\boxed{\forall \alpha > 0 \ , \ \mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(|x|)}{\alpha}}$

Q34) $S_n(\omega) \geq \varepsilon \Leftrightarrow tnS_n(\omega) \geq tn\varepsilon$ car $tn > 0$ et comme exp est croissante alors :
$S_n(\omega) \geq \varepsilon \Leftrightarrow exp(tnS_n(\omega)) \geq exp(tn\varepsilon)$
Donc les évenements $(S_n \geq \varepsilon)$ et $(exp(tnS_n) \geq exp(tn\varepsilon))$ sont les mêmes et on à déjà :
$\mathbb{P}\big(S_n \geq \varepsilon\big) = \mathbb{P}\big(exp(tnS_n) \geq exp(tn\varepsilon)\big)$

On applique alors l'inégalité de Markov avec $Y = exp(tnS_n) \geq 0$ et $\alpha = e^{in\varepsilon}$ et on a :
$\mathbb{P}(exp(tnS_n) \geq exp(tn\varepsilon)) \leq \frac{\mathbb{E}(exp(tnS_n))}{e^{in\varepsilon}}$

Mais : $\mathbb{E}(exp(tnS_n)) = \mathbb{E}(exp(\sum\limits_{k=1}^{n} tX_k)) = \mathbb{E}(\prod\limits_{k=1}^{n} exp(tX_k))$
Mais les (X_k) sont mutuellement indépendantes, donc $\mathbb{E}(exp(tnS_n)) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(exp(tX_k))$ et comme les tX_k on tous la même espérance (celle de tX) on a : $\mathbb{E}(exp(tnS_n)) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(exp(tX)) = \mathbb{E}(e^{tX})^n$

Finalement : $\boxed{\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tnS_n}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})^n}{e^{tn\varepsilon}}}$

Q35) $g_a(x) = \frac{1-x}{2a} + \frac{a}{2}(1+x) - exp(ln(a)x)$ est clairement C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $g_a'(x) = \frac{-1}{2a} + \frac{a}{2} - ln(a)a^x$
En dérivant une nouvelle fois : $g_a''(x) = -ln(a)^2 a^x \leq 0$ donc g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$g_a(-1) = \frac{1}{a} - a^{-1} = 0$ et $g_a(1) = 0 + a - a^1 = 0$ on a donc $g_a(-1) = g_a(1) = 0$

$\begin{cases} g_a \text{ continue sur } [0,1] \\ g_a \text{ dérivable sur }]0,1[\\ g_a(0) = g_a(1) = 0 \end{cases}$, par le théorème de Rolle on a $\exists \theta \in]-1,1[$, $g_a'(\theta) = 0$. On en déduit le tableau de variation suivant (on déduit le signe de g_a' de sa valeur en θ et de sa décroissance) :

x	-1		θ		1
$g_a'(x)$		$+$	0	-	
$g_a(x)$	0	$\nearrow$	$g_a(\theta)$	$\searrow$	0

On en déduit que $\boxed{\forall x \in [-1,1] \ , \ g_a(x) \geq 0}$

Q36) Utilisons la question Q35) avec $a = e^t > 1$ car $t > 0$ on a $\forall x \in [-1, 1]$:
$g_a(x) = \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t - (e^t)^x \geq 0$ donc $\boxed{\forall t > 0\ ,\ \forall x \in [-1, 1]\ ,\ e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t}$

Q37) En utilisant Q36), par le théorème de transfert et par croissance de l'espérance :
$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \mathbb{E}(\frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t)$
Par linéarié de l'espérance et puisque X est centrée ($\mathbb{E}(X) = 0$) : $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \frac{1-\mathbb{E}(X)}{2}e^{-t} + \frac{1+\mathbb{E}(X)}{2}e^t = \frac{e^{-t}+e^t}{2} = ch(t)$

On a donc $\boxed{\forall t > 0\ ,\ \mathbb{E}(e^{tX}) \leq ch(t)}$

Q38) On raisonne par équivalence (le cas $t = 0$ étant évident on simplifiera par t^{2k}) :
$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}(\frac{t^2}{2})^k$
$\Leftrightarrow \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}\frac{t^{2k}}{2^k}$
$\Leftrightarrow 2^k k! \leq (2k)!$
$\Leftrightarrow 2^k k! \leq \prod_{i=1}^{k}(2i-1)(2i)$ (on a séparé les termes paires et impaires dans $(2k)!$
$\Leftrightarrow 2^k k! \leq \prod_{i=1}^{k}(2i)\prod_{i=1}^{k}(2i-1)$
$\Leftrightarrow 2^k k! \leq 2^k k!\prod_{i=1}^{k}(2i-1)$
$\Leftrightarrow 1 \leq \prod_{i=1}^{k}(2i-1)$ évident car le membre de droite est un produit de terme plus grand que 1

On a donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}(\frac{t^2}{2})^k}$

En sommant cette inégalité pour k variant de 0 à $+\infty$ on a : $\forall t > 0\ ,\ \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(\frac{t^2}{2})^k$
Et comme on a les DSE du cours on en déduit : $ch(t) \leq e^{t^2/2}$, en combinant avec Q37 on a :

$\boxed{\forall t > 0\ ,\ \mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}}$

Q39) Posons $\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ q(t) = exp(-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2})$
Alors q est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ q'(t) = (-n\varepsilon + nt)q(t) = nq(t)(t-\varepsilon)$

On en déduit le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		ε		$+\infty$
$q'(t)$		-	0	+	
$g_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$q(\varepsilon)$	$\nearrow$	$+\infty$

avec $q(\varepsilon) = exp(-n\varepsilon^2 + n\frac{\varepsilon^2}{2}) = exp(-n\frac{\varepsilon^2}{2})$

$\boxed{q \text{ admet donc un minimum en } t = \varepsilon \text{ et ce minimum vaut } e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}}$

Q40) • On reprend Q34) qui donne : $\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})^n}{e^{tn\varepsilon}}$
Avec Q38) : $\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{(e^{t^2/2})^n}{e^{tn\varepsilon}} = exp(nt^2/2 - tn\varepsilon) = q(t)$

Ensuite on minimise le membre de droite en choisissant $t = \varepsilon$ (Q39)) et on obtient : $\boxed{\mathbb{P}(S_n \leq \varepsilon) \leq exp(-n\frac{\varepsilon^2}{2})}$

• On remarque que les variables aléatoires $-X_i$ suivent les mêmes hypothèses que les X_i, à savoir, centrée en 0 et à valeurs dans $[-1, 1]$.
De la même manière on peut obtenir $\mathbb{P}(-S_n \geq \varepsilon) \leq exp(-n\frac{\varepsilon^2}{2})$ ou encore $\mathbb{P}(S_n \leq -\varepsilon) \leq exp(-n\frac{\varepsilon^2}{2})$

Mais $(|S_n| \geq \varepsilon) = (S_n \geq \varepsilon) \cup (S_n \leq -\varepsilon)$
Comme les événements sont incompatibles alors $\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(S_n \leq -\varepsilon)$
Et en utilisant les deux dernières inégalités montrées on obtient : $\boxed{\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2exp(-n\frac{\varepsilon^2}{2})}$

Q41) Au voisinage de $+\infty$: $2exp(-n\frac{\varepsilon^2}{2}) = o(\frac{1}{n^2})$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann à termes positifs convergente, donc par négligeabilité $\sum 2exp(-n\frac{\varepsilon^2}{2})$ est convergente, et par règle de comparaison $\boxed{\sum \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \text{ est convergente.}}$

Q42) Pour $m \geq n$, $(|S_m(\omega)| > \varepsilon)$ est un événement donc B_n est une union dénombrable d'événements (car Ω est dénombrable) et donc, par propriété sur les tribus : $\boxed{B_n \text{ est un événement.}}$

On remarque que $B_{n+1} \subset B_n$ car $B_n = B_{n+1} \cup \{\omega \in \Omega ; |S_n(\omega)| > \varepsilon\}$, donc $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements. Par continuité décroissante on obtient : $\mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$

Comme $0 \leq \mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{m\geq n} \mathbb{P}(|S_n(\omega)| > \varepsilon) \leq \sum_{m\geq n} \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$ qui est le reste d'une série convergente et donc qui tend vers 0. On a donc : $\boxed{\mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n) = 0}$

Q43) • Notons $B_n(\varepsilon) = B_n = \bigcup_{m\geq n} \{\omega \in \Omega ; |S_n(\omega)| > \varepsilon\}$ pour marquer la dépendance en ε.
On a alors : $\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{B_n(\frac{1}{k})}$

Ω_k est alors une réunion dénombrable d'événements et donc $\boxed{\Omega_k \text{ est un événement.}}$

• Par définition de la limite : $\lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ \exists n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall m \geq n\ ,\ |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}$

On a donc $\boxed{A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k}$

Comme on a une intersection dénombrable d'événements on en déduit que $\boxed{A \text{ est un événement.}}$

Q44) On remarque que $\overline{\Omega_k} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(\frac{1}{k})$ En appliquant Q42) avec $\varepsilon = \frac{1}{k}$ on obtient : $\mathbb{P}(\overline{\Omega_k}) = 0$
En passant au complémentaire on a : $\mathbb{P}(\Omega_k) = 1$

Comme $|S_n(\omega)| \leq \frac{1}{k+1} \Rightarrow |S_n(\omega)| \leq \frac{1}{k}$ alors $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$ et on en déduit que $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements.

Par continuité décroissante on alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(\Omega_k) = 1$ puisque $\mathbb{P}(\Omega_k) = 1$

On a donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = 1}$

On a donc montré que si X est une variable aléatoire discrète centrée à valeurs dans $[-1, 1]$ alors la suite (S_n), avec $S_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$, converge presque sûrement vers la constante 0.
C'est un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Centrale PSI 2017, mathématiques 1 : Grandes déviations

I.A.1) • Commençons par démontrer un lemme qui nous sera utile.
Lemme préliminaire : Soit T une variable aléatoire discrète positive, admettant une espérance et telle que $E(T) = 0$.
Alors : T est presque sûrement nulle.

preuve : Comme T est discrète alors : $T(\Omega) = \{x_i \ , \ i \in \mathbb{N}\}$
Alors $E(T) = 0 \Rightarrow \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{x_i P(T = x_i)}_{\geq 0} = 0$
On a une somme de termes positifs qui est nulle donc :
$\forall i \in \mathbb{N} \ , \ x_i P(T = x_i) = 0$ et donc $P(T = x_i) = 0$ pour $x_i \neq 0$
Comme $(T = x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est le système complet d'événement associé à T alors :
$\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} P(T = x_i) = 1 \Rightarrow \underbrace{\sum\limits_{i\in\mathbb{N} \ \ x_i\neq 0} P(T = x_i)}_{=0} + P(T = 0) = 1 \Rightarrow P(T = 0) = 1$
On a donc démontrer le lemme préliminaire.

• Revenons à la question posée. Posons, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = E((U + \lambda V)^2)$
Alors, par linéarité de l'espérance, et après avoir développer : $P(\lambda) = E(U^2) + 2\lambda E(UV) + \lambda^2 E(V^2)$

Comme V n'est presque pas sûrement nulle, alors V^2 non plus et donc $E(V^2) > 0$ (lemme préliminaire)
On en déduit que P est un polynôme de degré exactement 2. Comme de plus, par construction $P(\lambda) \geq 0$ pour tout λ, alors le discriminant de ce polynôme est négatif.
Donc $\Delta \leq 0 \Rightarrow (2E(UV))^2 - 4E(U^2)E(V^2) \leq 0 \Rightarrow \boxed{E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 \geq 0}$

Si, il y a égalité alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = 0 \Rightarrow E((U + \lambda V)^2) = 0 \Rightarrow U + \lambda V$ est presque sûrement nulle en utilisant le lemme préliminaire.

On a donc : $\boxed{E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 = 0 \text{ si et seulement si } \exists \lambda \in \mathbb{R} \ , \ U + \lambda V \text{ est presque sûrement nulle.}}$

I.A.2.a) • On commence par remarquer que, si $|T|$ est bornée, alors $E(T) < +\infty$
En effet si $|T| \leq M$ avec $M \in R^+$ alors : $\forall t \in T(\Omega)$, $|t| P(T = t) \leq MP(T = t)$ et $\sum\limits_{t\in T(\Omega)} P(T = t)$ est convergente (et vaut 1), ce qui assure l'existence de $E(T)$.

• Si X est bornée, alors, pour tout $\tau \in \mathbb{R}^{+*}$, $e^{\tau|X|}$ est bornée et admet donc une espérance.
Donc : $\boxed{X \text{ bornée} \Rightarrow X \text{ vérifie } (C_\tau) \text{ pour tout } \tau \in \mathbb{R}^{+*}}$

I.A.2.b) Si $X \hookrightarrow G(p)$, par le théorème du transfert :
$E(e^{tX}) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} e^{tk} P(X = k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} (e^t)^k p(1-p)^{k-1} = pe^t \sum\limits_{k=1}^{+\infty} ((1-p)e^t)^{k-1}$
On a une série géométrique convergente si et seulement si $(1-p)e^t < 1 \Leftrightarrow e^t < \frac{1}{1-p} \Leftrightarrow t < -ln(1-p)$
En cas de convergence : $E(e^{tX}) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$

On a donc : $\boxed{E(e^{tX}) < +\infty \text{ si et seulement si } t < -ln(1-p) \text{ et alors } E(e^{tX}) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}}$

I.A.2.c) Si $X \hookrightarrow P(\lambda)$, par le théorème du transfert :
$E(e^{tX}) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} e^{tk} P(X = k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (e^t)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!}$
On reconnaît une série exponentielle qui converge pour tout t.
Alors : $E(e^{tX}) = e^{-\lambda} exp(\lambda e^t)$

On a donc : $\boxed{E(e^{tX}) < +\infty \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } E(e^{tX}) = exp(\lambda(e^t - 1))}$

I.A.3.a) • cas 1 : $X \geq 0$
Alors $a \leq t \leq b \Rightarrow tX \leq tb \Rightarrow e^{tX} \leq e^{tb}$ (car exp croissante)
cas 2 : $X \leq 0$
Alors $a \leq t \leq b \Rightarrow tX \leq ta \Rightarrow e^{tX} \leq e^{ta}$ (car exp croissante)

Dans tout les cas on a donc : $\boxed{\forall t \in [a,b]\ ,\ e^{tX} \leq e^{ta} + e^{tb}}$

• Comme on a supposé $E(e^{ta}) < +\infty$ et $E(e^{tb}) < +\infty$ alors, avec l'inégalité ci-dessus, et par comparaison : $\boxed{\forall t \in [a,b]\ ,\ E(e^{tX}) < +\infty}$

• $\forall (a,b) \in \{t \in \mathbb{R}\ ,\ E(^{tX}) < +\infty\}$ tel que $a < b$ on a $[a,b] \subset \{t \in \mathbb{R}\ ,\ E(^{tX}) < +\infty\}$. On a donc une partie convexe de $\mathbb{R}$ et on en déduit que : $\boxed{\{t \in \mathbb{R}\ ,\ E(e^{tX}) < +\infty\} \text{ est un intervalle.}}$

I.A.3.b) • Pour y au voisinage de $+\infty$: $e^{ay} + e^{by} = e^{by}(1 + exp((\underbrace{a-b}_{<0})y))$ donc $e^{ay} + e^{by} \sim e^{by}$

Alors $\theta_{k,t,a,b}(y) \sim \frac{y^k e^{ty}}{e^{by}} \sim y^k exp(\underbrace{(t-b)}_{<0} y) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

• Pour y au voisinage de $+\infty$: $e^{ay} + e^{by} = e^{ay}(1 + exp((\underbrace{b-a}_{<0})y))$ donc $e^{ay} + e^{by} \sim e^{ay}$

Alors $\theta_{k,t,a,b}(y) \sim \frac{y^k e^{ty}}{e^{ay}} \sim y^k e(\underbrace{(t-a)}_{>0} y) \underset{y \to -\infty}{\longrightarrow} 0$

• Bilan : $\boxed{\lim_{y \to +\infty} \theta_{k,t,a,b}(y) = \lim_{y \to -\infty} \theta_{k,t,a,b}(y) = 0}$

• $\theta_{k,t,a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de limites nulles en $+\infty$ et $-\infty$, donc $\boxed{\theta_{k,t,a,b} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.}$

I.A.3.c) En utilisant le I.A.3.b) : $\exists M \in \mathbb{R}\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}\ ,\ |\theta_{k,t,a,b}(y)| \leq M$ et donc $|y|^k e^{ty} \leq M(e^{ay} + e^{by})$
Donc $|X|^k e^{tX} \leq M(e^{aX} + e^{bX})$
Comme au a) on en déduit que : $\boxed{E(|X|^k e^{tX}) < +\infty}$

I.A.3.d) Comme au a) on a $\forall t \in [c,d]\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}\ ,\ |\theta_{k,t,a,b}(y)| \leq |y|^k \frac{e^{cy}+e^{dy}}{e^{ay}+e^{by}}$

Donc, au voisinage de $+\infty$ (comme au b)) : $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leq |y|^k \frac{e^{cy}+e^{dy}}{e^{ay}+e^{by}} \sim |y|^k \frac{e^{dy}}{e^{by}} \sim |y|^k exp(\underbrace{(d-b)}_{<0} y) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

On a utilisé : $d < b$

Au voisinage de $-\infty$ (comme au b)) : $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leq |y|^k \frac{e^{cy}+e^{dy}}{e^{ay}+e^{by}} \sim |y|^k \frac{e^{cy}}{e^{ay}} \sim |y|^k exp(\underbrace{(c-a)}_{>0} y) \underset{y \to -\infty}{\longrightarrow} 0$

On a utilisé : $a < c$

On démontre alors que $y \mapsto |y|^k \frac{e^{cy}+e^{dy}}{e^{ay}+e^{by}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ comme à la fin du b).

On a donc : $\boxed{\exists M_{k,a,b,c,d}\ ,\ \forall t \in [c,d]\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}\ ,\ |\theta_{k,t,a,b}| \leq M_{k,a,b,c,d}}$

I.A.4.a) • Soit I l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tel que $E(e^{tX}) < +\infty$
On sait déjà que I est un intervalle d'après la question I.A.3.a).
• Soit $t \in [-\tau, \tau]$
Alors $e^{t|X|} \leq e^{\tau|X|}$ et comme X vérifie (C_τ) alors $E(e^{\tau|X|}) < +\infty$
Par comparaison on a donc $E(e^{t|X|}) < +\infty$ et donc $t \in I$
• Bilan : $\boxed{I \text{ est un intervalle contenant } [-\tau, \tau]}$

I.A.4.b) Comme $X(\Omega)$ est fini, pas le théorème de transfert : $E(e^{tX}) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} e^{tx} P(X = x)$ est une somme FINIE de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{X(\Omega) \text{ finie} \Rightarrow \varphi_X \in C^\infty(\mathbb{R})}$

Remarque : $I = \mathbb{R}$ et on a bien φ_X continue sur I et C^∞ à l'intérieur de I.

I.A.4.c) Avec les notations de l'énoncé : $\varphi_X(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n e^{tx_n}$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{array}{cccc} f_n & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & p_n e^{tx_n} \end{array}$

Par définition de I, $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ converge simplement vers φ_X sur I.

• Soit $[a, b]$ un segment inclus dans I. Alors, avec I.A.3.a) : $\forall t \in [a, b]$, $0 \leq f_n(t) \leq f_n(a) + f_n(b)$
Comme $\sum (f_n(a) + f_n(b))$ est convergente, alors, avec l'inégalité ci-dessus, $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, b]$

Les f_n sont continues sur $[a, b]$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformément vers φ_X sur $[a, b]$.
On en déduit que φ_X est continue sur $[a, b]$.
Comme φ_X est continue sur tout segment de I et que I est un intervalle donc est la réunion de ses segments alors :
$\boxed{\varphi_X \text{ est continue sur } I.}$

• Soit $[a, b]$ un segment inclus dans I et $[c, d]$ un autre segment strictement inclus dans $[a, b]$ pour pouvoir utilisé I.3.d)

Les f_n sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a : $\forall t \in I$, $f_n^{(i)}(t) = p_n x_n^i e^{tx_n}$
Donc $\left| f_n^{(i)}(t) \right| \leq |x_n|^i p_n e^{tx_n}$

On a alors, avec I.A.3.d) $\exists M_{i,a,b,c,d}$ tel que : $\left| f_n^{(i)}(t) \right| \leq M_{i,a,b,c,d}(f_n(c) + f_n(d))$
Et a donc $\sum f_n^{(i)}$ qui converge normalement, donc uniformément et donc simplement sur $[c, d]$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} \text{les } f_n \text{ sont de classe } C^k \text{ sur } [c, d] \\ \forall i \in [\![0; k-1]\!] \text{ , } \sum f_n^{(i)} \text{ converge simplement sur } I \\ \sum f_n^{(k)} \text{ converge uniformément sur } [c, d] \end{cases}$,
on en déduit alors que φ_X est de classe C^k sur $[c, d]$.
Comme ceci est valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout segment $[c, d]$ construit comme en début de question, alors :
φ_X est C^∞ sur l'intérieur de I.

• Bilan : $\boxed{\varphi_X \text{ est continue sur } I \text{ et } C^\infty \text{ sur l'intérieur de } I.}$

I.A.4.d) Le c) permet aussi de conclure que pour tout $t \in \mathring{I}$ (intérieur de I) et tout $k \in \mathbb{N}$ on a :
$\varphi_X^{[k)}(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n x_n^k e^{tx_n}$

Par la formule du transfert, comme la série est convergente, on a : $\boxed{\forall t \in \mathring{I} \text{ , } \varphi_X^{(k)}(t) = E(X^k e^{tX})}$

I.A.4.e) ψ_X est bien définie car $\varphi_X(t) > 0$ et dérivable. On a : $\psi'_X(t) = \frac{\varphi''_X(t)\varphi_X(t) - \varphi'_X(t)}{(\varphi_X(t))^2}$
Avec le résultat de d) : $\psi'_X(t) = \frac{E(X^2 e^{tX})E(e^{tX}) - (E(Xe^{tX}))^2}{(\varphi_X(t))^2}$
Si on note $U = Xe^{tX/2}$ et $V = e^{tX/2}$ alors : $\psi'_X(t) = \frac{E(U^2)E(V^2) - (E(UV))^2}{(\varphi_X(t))^2}$

On peut alors utiliser le I.A.1) pour avoir $\psi'_X(t) \geq 0$

On a de plus : $\psi'_X(t) = 0$
si et seulement si $\exists \lambda$, $\lambda V + U$ est presque sûrement nulle.
si et seulement si $\exists \lambda$, $\lambda e^{tX/2} + Xe^{tX/2}$ est presque sûrement nulle.
si et seulement si $\exists \lambda$, $\lambda + X$ est presque sûrement nulle (car $e^{tX/2} \neq 0$)
si et seulement si X est presque sûrement constante.

Donc, si X n'est pas presque sûrement constant alors $\psi'_X(t) > 0$

• Bilan : $\boxed{\psi_X \text{ est croissante sur } I \text{ et, si } X \text{ n'est pas presque sûrement constante, } \psi_X \text{ est strictement croissante sur } I.}$

I.B.1) Par linéarité de l'espérance $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ et comme les X_k ont tous la même espérance $E(X_k) = E(X)$ alors $E(S_n) = nE(X)$

Comme X admet un moment d'ordre 2, alors S_n aussi, et on peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour obtenir : $P(|S_n - E(S_n)| \geq n\delta) \leq \frac{V(S_n)}{(n\delta)^2}$
Les X_k sont indépendantes, donc $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = nV(X)$
Reporter dans l'inégalité ci-dessus, comme $\frac{V(S_n)}{(n\delta)^2} = \frac{nV(X)}{(n\delta)^2} = \frac{V(X)}{n\delta^2}$ on a : $\boxed{P(|S_n - nE(X)| \geq n\delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}}$

I.B.2) $nu < S_n < nv \Leftrightarrow n(u - E(X)) < S_n - nE(X) < n(v - E(X))$

Si on pose $\delta = Min(n(v - E(X)), n(E(X) - u)) > 0$ alors $|S_n - nE(X)| < n\delta \Rightarrow nu < S_n < nv$
et donc $P(|S_n - nE(X)| < n\delta) \leq \pi_n = P(nu < S_n < nv)$

En passant par l'événement contraire : $P(|S_n - nE(X)| < n\delta) = 1 - P(|S_n - nE(X)| \geq n\delta)$
Avec le I.B.1) on a alors : $1 - \frac{V(X)}{n\delta^2} \leq \pi_n \leq 1$ ($\pi_n \leq 1$ est évident)
Comme $\frac{V(X)}{n\delta^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors, par encadrement : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \pi_n = 1}$

I.C.1) • Montrons par récurrence que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $u_{qm} \geq qu_m$

Initialisation :
On a : $u_{0+0} \geq u_0 + u_0 \Rightarrow u_0 \geq u_0 + u_0 \Rightarrow u_0 \geq 0$, on a donc le resultat pour $q = 0$

Hérédité :
Soit $q \in \mathbb{N}$, on suppose vraie : $u_{qm} \geq qu_m$
Alors $u_{(q+1)m} \geq u_{qm} + u_m \geq qu_m + u_m = (q+1)u_m$ et on a le résultat au rang $q + 1$

Conclusion : $\forall q \in \mathbb{N}$, $u_{qm} \geq qu_m$

• Alors, si $n = qm + r$ on a : $u_n \geq u_{qm} + u_r \geq qu_m + u_r$ on a donc : $\boxed{u_n \geq qu_m + u_r}$

• Comme $ns = (qm + r)s = qms + rs$ alors $u_n - ns \geq qu_m + u_r - (qms + rs) = q(u_m - ms) + u_r - rs$

On a donc : $\boxed{u_n - ns \geq q(u_m - ms) + u_r - rs}$

I.C.2) avec I.C.1) : $\frac{u_n}{n} - s \geq \frac{q}{n}(u_m - ms) + \frac{u_r - rs}{n}$
$\Rightarrow \frac{u_n}{n} \geq \frac{q}{n}u_m - \frac{qms}{n} + \frac{u_r-rs}{n} + s$
$\Rightarrow \frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} + (\frac{q}{n} - \frac{1}{m})u_m + \frac{u_r}{n} + (\frac{-qm}{n} - \frac{r}{n} + 1)s$
$\Rightarrow \frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} + \frac{qm-n}{nm}u_m + \frac{u_r}{n} + (\frac{-qm-r}{n} + 1)s$
$\Rightarrow \frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} + \frac{qm-(qm+r)}{nm}u_m + \frac{u_r}{n} + (-1+1)s$
$\Rightarrow \frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} + \frac{-r}{nm}u_m + \frac{u_r}{n}$

Mais $\left|\frac{-r}{nm}u_m + \frac{u_r}{n}\right| \leq \frac{r}{nm}|u_m| + \frac{1}{n}Max(|u_0|, \dots, |u_{m-1}|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq N$, $\left|\frac{-r}{nm}u_m + \frac{u_r}{n}\right| \leq \varepsilon$ et donc $\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon$

Bilan : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall \epsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall n \geq N \ , \ \frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon}$

I.C.3) Par définition de s, on a déjà $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_n}{n} \leq s$
Soit $\varepsilon > 0$. Alors, par définition de s, $\exists m \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_m}{m} \geq s - \varepsilon$
En utilisant le I.C.2) et le début de la question, on a : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq N$, $1 - 2\varepsilon \leq \frac{u_n}{n} \leq s$
Donc, par définition de la limite on a : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = s}$

II.A.1) • Commençons par l'implication facile.
Si on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \geq na) = 0$ alors, en particulier pour $n = 1$ on a : $P(X_1 \geq a) = 0$ et comme X et X_1 suivent la même loi alors $P(X \geq a) = 0$

• Réciproquement. Supposons que $P(X \geq a) = 0$ et montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \geq na) = 0$
On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : au rang $n = 1$
Comme $X_1 \sim X$ alors $P(X \geq a) = 0 \Rightarrow P(X_1 \geq a) = 0 \Rightarrow P(S_1 \geq a) = 0$
La récurrence est initialisée.

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n.

Comme $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ alors, si $(S_n < a)$ et $X_{n+1} < a$ on a $S_{n+1} < (n+1)a$.
On remarque donc que $(S_{n+1} \geq (n+1)a) \subset (S_n \geq a) \cup (X_{n+1} \geq a)$
Alors $P(S_{n+1} \geq (n+1)a) \leq P(S_n \geq a) + P(X_{n+1} \geq a)$
Comme $X_{n+1} \sim X$ et par hypothèse de récurrence : $P(S_{n+1} \geq (n+1)a) \leq 0 + 0 = 0$ et donc $P(S_{n+1} \geq (n+1)a) = 0$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \geq na) = 0$

• On a donc démontrer par double implications que : $\boxed{P(X \geq a) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ P(S_n \geq na) = 0}$

II.A.2.a) $S_{m+n} - S_m = \sum\limits_{k=m+1}^{m+n} X_k = \sum\limits_{p=1}^{n} X_{p+n}$
Mais comme les X_k sont indépendantes alors la fonction génératrice de $S_{m+n} - S_m$ vaut $G_{S_{m+n}-S_m} = \prod\limits_{p=1}^{n} G_{X_{p+n}}$
Mais comme tout les X_k suivent la même loi que X alors : $G_{S_{m+n}-S_m} = (G_X)^n$
De même $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} X_p$ donc $G_{S_n} = (G_X)^n$
On a donc $G_{S_n} = G_{S_{m+n}-S_m}$ et on en déduit que : $\boxed{S_{m+n} - S_m \text{ et } S_n \text{ suivent la même loi.}}$

II.A.2.b) On remarque que : $(S_n \geq nb)$ et $(S_{m+n} - S_n \geq mb) \Rightarrow S_n + S_{m+n} - S_n \geq nb + mb = (n+m)b$
Donc : $\Big((S_n \geq nb) \cap (S_{m+n} - S_n \geq mb)\Big) \subset (S_n + (S_{m+n} - S_n) \geq (m+n)b) = (S_{m+n} \geq (m+n)b)$
Donc $P\Big((S_n \geq nb) \cap (S_{m+n} - S_n \geq mb)\Big) \leq P(S_{m+n} \geq (m+n)b)$

Par le lemme des coalitions S_n et $S_{m+n} - S_n$ sont indépendantes donc :
$P(S_n \geq nb)P(S_{m+n} - S_n \geq mb) \leq P(S_{m+n} \geq (m+n)b)$

Mais, par le a), $S_{m+n} - S_n$ et S_m suivent la même loi donc :
$\boxed{P(S_n \geq nb)P(S_m \geq mb) \leq P(S_{m+n} \geq (m+n)b}$

II.A.3) • On a $P(X \geq a) > 0$ donc $P(X_1 \geq a) > 0$ et donc $P(S_1 \geq a) > 0$
Avec II.A.2) : $P(S_2 \geq 2a) \geq P(S_1 \geq a)P(S_1 \geq a) = P(S_1 \geq a)^2 > 0$
Par récurrence on a $P(S_n \geq na) \geq P(S_1 \geq a)^n > 0$ et donc $\boxed{\text{on peut définir la suite } \left(\frac{ln(P(S_n \geq na))}{n}\right)_{n\geq 1}}$

• On remarque que grâce au a), que la suite $\left(\frac{ln(P(S_n \geq na))}{n}\right)_{n\geq 1}$ est suraditive et majorée par 0, donc, en utilisant le I.C., il existe $\gamma_a = \sup\{\frac{ln(P(S_n \geq na))}{n} \ , \ n \in \mathbb{N}^*\}$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{ln(P(S_n \geq na))}{n} = \gamma_a$
Comme les éléments de la suite sont négatif, on en déduit $\gamma_a \leq 0$
Comme γ_a est un sup on a : $\frac{ln(P(S_n \geq na))}{n} \leq \gamma_a$ et en passant à l'exp (croissante) :
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ P(S_n \geq na) \leq e^{n\gamma_a}}$

II.B.1) • $E(e^{tS_n}) = E(e^{t\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}) = E(\prod\limits_{k=1}^{n} e^{tX_k})$
On utilise l'indépendance des X_k et donc des e^{tX_k} pour avoir : $E(e^{tS_n}) = \prod\limits_{k=1}^{n} E(e^{tX_k})$
On utilise maintenant que les X_k suivent toutes la même loi que X : $E(e^{tS_n}) = \prod\limits_{k=1}^{n} E(e^{tX})$
Mais $E(e^{tX}) = \varphi_X(t)$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall t \in I \cap \mathbb{R}^+ \ , \ E(e^{tS_n}) = (\varphi_X(t))^n}$

Remarque : pour cette égalité, $t \in I$ suffit pour que $\varphi_X(t)$ existe.

• Pour $t > 0$, $(S_n \geq na) = (tS_n \geq tna) = (e^{tS_n} \geq e^{nta})$

Par l'inégalité de Markov on a : $P(e^{tS_n} \geq e^{nta}) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{nta}} = \frac{(\varphi_X(t))^n}{e^{nta}}$ en utilisant le début de la question.
On a finalement, pour $t > 0$: $P(S_n \geq na) \leq \frac{(\varphi_X(t))^n}{e^{nta}}$
Ce résultat reste valable pour $t = 0$ car une probabilité est toujours plus petite que 1 ($e^{n0a} = 1$).

Conclusion : $\boxed{\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+ \ , \ P(S_n \geq na) \leq \frac{(\varphi_X(t))^n}{e^{nta}}}$

II.B.2.a) On reprend la dernière inégalité trouvée (au II.B.1) pour $n = 1$ et on a :
$P(S_1 \geq a) \leq \frac{\varphi_X(t)}{e^{ta}} \Leftrightarrow P(X \geq a) \leq \frac{\varphi_X(t)}{e^{ta}}$
En prenant le ln : $ln(P(X \geq a) \leq ln(\varphi_X(t)) - ta = \chi(t)$

On en déduit : $\boxed{\chi \text{ est minorée sur } I \cap \mathbb{R}^+}$

II.B.2.b) • Comme $\exists \tau > 0$ tel que X vérifie (C_τ) on peut utilise I.A.4) et on a φ_X qui est C^∞ sur $[-\tau, \tau]$. On peut donc appliquer Taylor Young en 0 et on a pour t au voisinage de $t = 0$:

$$\varphi_X(t) = \varphi_X(0) + t\varphi_X'(0) + o(t)$$

Mais $\varphi_X(0) = E(e^{0X}) = E(1) = 1$ et, en utilisant I.A.4.d) $\varphi_X'(0) = E(X)$ donc $\varphi_X(t) = 1 + E(X)t + o(t)$

On en déduit : $\chi(t) = ln(1 + E(X)t + o(t)) - ta = E(X)t + o(t) - ta = (E(X) - a)t + o(t)$

Mais comme par hypothèse $a > E(X)$ alors $E(X) - a < 0$ et donc $\boxed{\chi(t) \underset{t=0}{\sim} (E(X) - a)t}$

• On déduit de l'équivalent précédent que χ prend des valeurs strictement négatives sur $I \cap \mathbb{R}^+$ et donc, comme η_a est un inf sur au moins une valeur strictement négative alors $\boxed{\eta_a < 0}$

II.B.2.c) • Par définition de η_a, il existe $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (I \cap \mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que : $\lim\limits_{k\to+\infty} \chi(t_k) = \eta_a$
Alors, quand $k \to +\infty$: $ln(\varphi_X(t_k)) - t_k a = \eta_a + o(1)$
$\Rightarrow ln(\varphi_X(t_k)) = \eta_a + t_k a + o(1)$
$\Rightarrow \varphi_X(t_k) = exp(\eta_a + t_k a + o(1))$
$\Rightarrow \varphi_X(t_k)^n = exp(n\eta_a + nt_k a + o(1))$ (on travaille avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé)
$\Rightarrow \frac{\varphi_X(t_k)^n}{e^{nt_k a}} = exp(n\eta_a + o(1))$

En utilisant II.B.1) : $P(S_n \geq na) \leq \frac{(\varphi_X(t))^n}{e^{nta}} = exp(n\eta_a + o(1))$
En passant à la limite ($k \to +\infty$) : $P(S_n \geq na) \leq exp(n\eta_a)$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ P(S_n \geq na) \leq e^{n\eta_a}}$

• Avec l'inégalité précédente : $\frac{ln(P(S_n \geq na))}{n} \leq \eta_a$
En passant à la limite ($n \to +\infty$) ci-dessus, on obtient : $\boxed{\gamma_a \leq \eta_a < 0}$

II.B.2.d.i) • Si $X \hookrightarrow B(p)$ avec $0 < p < 1$, alors $E(X) = p$ et, comme $X(\Omega) = \{0, 1\}$,

$$P(X \geq a) = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 1 \\ p \text{ si } 0 < a \leq 1 \\ 1 \text{ si } a \leq 0 \end{cases}$$

On veut $P(X \geq a) > 0$ donc il faut $a \leq 1$ et on veut $a > E(X)$ donc il faut $a > p$

Pour avoir les deux conditions il faut : $\boxed{a \in]p, 1]}$

• $\varphi_X(t) = E(e^{tX})$ donc par le théorème de Transfert : $\varphi_X(t) = (1 - p) \times 1 + pe^t = (1 - p) + pe^t$

Alors : $\chi(t) = ln(\varphi_X(t)) - ta = ln((1 - p) + pe^t) - ta$. On a : $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Si on dérive : $\chi'(t) = \frac{pe^t}{(1-p)+pe^t} - a = \frac{pe^t - a(1-p) - ape^t}{(1-p)+pe^t} = \frac{p(1-a)e^t - a(1-p)}{(1-p)+pe^t}$

$p(1 - a)e^t - a(1 - p) = 0 \Leftrightarrow e^t = \frac{a(1-p)}{p(1-a)} \Leftrightarrow t = ln(\frac{a(1-p)}{p(1-a)})$
Posons $t_0 = ln(\frac{a(1-p)}{p(1-a)})$, alors, comme on sait que χ admet un minimum, ce minimum est atteint en t_0 et vaut :
$\chi(t_0)$
$= ln((1 - p) + pe^{t_0}) - at_0$
$= ln((1 - p) + p\frac{a(1-p)}{p(1-a)}) - aln(\frac{a(1-p)}{p(1-a)})$
$= ln((1 - p) + \frac{a(1-p)}{(1-a)}) - aln(\frac{a(1-p)}{p(1-a)})$
$= ln(\frac{1-p-a+ap+a-ap}{1-a}) - aln(\frac{a(1-p)}{p(1-a)})$
$= ln(\frac{1-p}{1-a}) - aln(\frac{a(1-p)}{p(1-a)})$
$= ln(\frac{1-p}{1-a}) - a[ln(\frac{(1-p)}{1-a}) + ln(\frac{a}{p})]$
$= (1 - a)ln(\frac{1-p}{1-a}) - aln(\frac{a}{p})$

On a donc : $\boxed{\eta_a = (1 - a)ln(\frac{1-p}{1-a}) - aln(\frac{a}{p})}$

II.B.2.d.ii) • Si $X \hookrightarrow P(\lambda)$ avec $0 < \lambda$, alors $E(X) = \lambda$

Alors $X(\Omega) = \mathbb{N} \Rightarrow P(X \geq a) > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et la condition $a > E(X)$ donne $\boxed{a \in]\lambda, +\infty[}$

• $\varphi_X(t) = E(e^{tX})$ donc par le théorème de Transfert :

$$\varphi_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)e^{tk} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}(e^t)^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} exp(\lambda e^t)$$

On a donc $\varphi_X(t) = exp(\lambda e^t - \lambda)$

Alors : $\chi(t) = ln(\varphi_X(t)) - ta = \lambda e^t - \lambda - ta$ On a : $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Si on dérive : $\chi'(t) = \lambda e^t - a$, donc χ est minimum en $t_0 = ln(\frac{a}{\lambda})$ et $\eta_a = \lambda \frac{a}{\lambda} - \lambda - aln(\frac{a}{\lambda}) = a - \lambda - aln(\frac{a}{\lambda})$

Conclusion : $\boxed{\eta_a = a - \lambda - aln(\frac{a}{\lambda})}$

II.C.1.a) Par la formule de transfert $E(e^{tX}) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} e^{tx} P(X = x)$, on en déduit directement :

$$\boxed{\sum_{x \in X(\Omega)} \frac{e^{tx} P(X=x)}{E(e^{tX})} = 1}$$

II.C.1.b) • Par la formule définissant $E(X')$: $E(X') = \sum\limits_{x \in X'(\Omega)} xP(X' = x)$

Comme $X'(\Omega) = X(\Omega)$ et par définition de $P(X' = x)$:

$$E(X') = \sum_{x \in X'(\Omega)} x \frac{e^{tx} P(X=x)}{E(e^{tX})} = \frac{1}{E(e^{tX})} \sum_{x \in X(\Omega)} xe^{tx} P(X = x) = \frac{1}{E(e^{tX})} E(Xe^{tX})$$

Et avec la question I.A.4.d) : $\boxed{E(X') = \frac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)}}$

• D'après ce qui précède $E(X') = \psi_X(t)$ avec $\psi_X = \frac{\varphi'_X}{\varphi_X}$ strictement croissante sur I d'après I.A.4.e)

Comme $\chi' = \psi_X - a$ et que χ est minimale en σ alors $\chi'(\sigma) = 0$ et donc $\psi_X(\sigma) = a$
Comme $t > \sigma$ et que Ψ_X est strictement croissante : alors $\psi_X(t) > \psi_X(a)$ et donc $E(X') = \psi_X(t) > \psi_X(\sigma) = a$

On a bien : $\boxed{E(X') > a}$

II.C.2.a) On remarque qu'avec la fonction f proposée par l'énoncé : $P(na \leq S'_n \leq nb) = E(f(X'_1, \ldots, X'_n))$, donc avec la propriété admise : $P(na \leq S'_n \leq nb) = \frac{E(f(X_1,\ldots,X_n)e^{tS_n})}{(\varphi_X(t))^n}$

On a : $E(f(X_1, \ldots, X_n)) = \sum\limits_{(x_1,\ldots,x_n) \in (X(\Omega))^n} P(X_1 = x_1 \cap \cdots \cap X_n = x_n) f(x_1, \ldots, x_n) e^{tS_n}$

Vu la définition de f : $E(f(X_1, \ldots, X_n)) = \sum\limits_{\substack{(x_1,\ldots,x_n) \in (X(\Omega))^n \\ na \leq x_1 + \cdots + x_n \leq nb}} P(X_1 = x_1 \cap \cdots \cap X_n = x_n) e^{tS_n}$

Comme $x_1 + \cdots + x_n = S_n \leq nb$ alors :

$$\begin{aligned} E(f(X_1, \ldots, X_n)) &\leq \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n) \in (X(\Omega))^n \\ na \leq x_1 + \cdots + x_n \leq nb}} P(X_1 = x_1 \cap \cdots \cap X_n = x_n) e^{tnb} \\ &= [\sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n) \in (X(\Omega))^n \\ na \leq x_1 + \cdots + x_n \leq nb}} P(X_1 = x_1 \cap \cdots \cap X_n = x_n)] e^{tnb} \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n) \in (X(\Omega))^n \\ na \leq x_1 + \cdots + x_n \leq nb}} P(X_1 = x_1 \cap \cdots \cap X_n = x_n) &\leq \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n) \in (X(\Omega))^n \\ na \leq x_1 + \cdots + x_n}} P(X_1 = x_1 \cap \cdots \cap X_n = x_n) \\ &\leq P(na \leq x_1 + \cdots + x_n) = P(S_n \geq na) \end{aligned}$$

Donc $E(f(X_1,\dots,X_n)) \leq P(S_n \geq na)e^{tnb}$

Comme on avait : $P(na \leq S'_n \leq nb) = \frac{E(f(X_1,\dots,X_n)e^{tS_n})}{(\varphi_X(t))^n}$ on a finalement : $\boxed{P(na \leq S'_n \leq nb) \leq P(S_n \geq na)\frac{e^{tnb}}{(\varphi_X(t))^n}}$

II.C.2.b) • A la question II.B.2.c) on a déjà montrer que : $\gamma_a \leq \eta_a < 0$

• En posant $\pi'_n = P(na \leq S'_n \leq nb)$ alors avec la question I.B.2) on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi'_n = 1$
(en effet on a bien $a < E(X') < b$ et on peut appliquer le résultat de I.B.2))

Avec le II.A.3) $P(S_n \geq na) \leq e^{n\gamma_a}$
On a donc , en utilisant le a) : $\pi'_n \leq e^{n\gamma_a}\frac{e^{tnb}}{(\varphi_X(t))^n}$ ou encore $\frac{\pi'_n}{e^{tnb}}(\varphi_X(t))^n \leq e^{n\gamma_a}$

On prend le ln et on obtient : $ln(\pi'_n) + nln(\varphi_X(t)) - ntb \leq n\gamma_a$
On divise par n : $\frac{ln(\pi'_n)}{n} + ln(\varphi_X(t)) - tb \leq \gamma_a$
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi'_n = 1$ et donc : $ln(\varphi_X(t)) - tb \leq \gamma_a$

Que l'on peut encore écrire : $ln(\varphi_X(t)) - at + at - tb \leq \gamma_a \Leftrightarrow \chi(t) + (a-b)t \leq \gamma_a$

Cette dernière inégalité est valable pour $t > \sigma$ à l'intérieur de I et b tel que $b > \psi_X(t)$

On fixe t et on fait tendre b vers $\psi_X(t)$ et on obtient : $\chi(t) + (a - \Psi_X(t))t \leq \gamma_a$

On fait maintenant tendre t vers σ, et par continuité de Ψ et de χ : $\chi(\sigma) + (a - \Psi_X(\sigma))\sigma \leq \gamma_a$

Mais $\chi(\sigma) = \eta_a$ et $\psi_X(\sigma) = a$ donc $\eta_a \leq \gamma_a$

• Comme on a vu l'autre inégalité alors : $\boxed{\eta_a = \gamma_a}$

II.C.3.a) • On va réutilisé ce qu'on a vu avec X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$
Ainsi $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de Binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{2})$

• On pose $a = \alpha + \frac{1}{2}$, donc on a bien $a \in]\frac{1}{2}, 1] =]p, 1]$ et on peut utiliser le II.B.2.d.i) pour avoir :
η_a
$= (1-a)ln(\frac{1-p}{1-a}) - aln(\frac{a}{p})$
$= (\frac{1}{2} - \alpha)ln(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\alpha}) - (\alpha + \frac{1}{2})ln(\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}})$
$= (\frac{1}{2} - \alpha)ln(\frac{1}{1-2\alpha}) - (\alpha + \frac{1}{2})ln(2\alpha + 1)$
$= (\alpha - \frac{1}{2})ln(1-2\alpha) - (\alpha + \frac{1}{2})ln(2\alpha + 1)$

• On a $\frac{1}{2^n}U_n = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k\in A_n}\binom{n}{k} = \sum\limits_{k\in A_n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \sum\limits_{k\in A_n} P(S_n = k)$

Vu la définition de A_n alors : $\frac{1}{2^n}U_n = P(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geq \alpha n)$

Comme $P(S_n = k) = P(S_n = n-k)$ ("symétrie" de la loi binomiale) alors :
$P(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geq \alpha n) = 2P(S_n - \frac{n}{2} \geq \alpha n) = 2P(S_n \geq na)$

On a alors : $\frac{1}{2^n}U_n = 2P(S_n \geq na)$

• En prenant le ln ci-dessus : $-nln(2) + ln(U_n) = ln(2) + ln(P(S_n \geq na))$
donc $\frac{ln(U_n)}{n} = \frac{n+1}{n}ln(2) + \frac{ln(P(S_n \geq na))}{n}$
On passe à la limite $(n \to +\infty)$ en utilisant la question II.A.3) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{ln(U_n)}{n} = \gamma_a + ln(2) = \eta_a + ln(2)$

- En repassant à l'exponentielle : $\lim_{n \to +\infty} (U_n)^{\frac{1}{n}} = 2e^{\eta_a}$

- Compte tenu du calcul de début de question : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (U_n)^{\frac{1}{n}} = 2\frac{(1-2\alpha)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(1+2\alpha)^{\alpha+\frac{1}{2}}}}$

II.C.3.b) On va faire comme à la question précédente avec $X \hookrightarrow P(\lambda)$.
On a alors : $S_n \hookrightarrow P(n\lambda)$ (cf exo, direct avec les fonctions génératrices)

On a : $\alpha > \lambda = E(X)$ et $P(X \geq \alpha) > 0)$

On remarque que : $T_n = e^{n\lambda} P(S_n \geq \alpha n)$

En prenant le ln : $ln(T_n) = n\lambda + ln(P(S_n \geq \alpha n)$ et donc $\frac{ln(T_n)}{n} = \lambda + \frac{ln(P(S_n \geq \alpha n)}{n}$
En passant à la limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{ln(T_n)}{n} = \lambda + \eta_\alpha$

Mais d'après II.B.2.d.ii) : $\eta_\alpha = \alpha - \lambda - \alpha ln(\frac{\alpha}{\lambda})$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{ln(T_n)}{n} = \lambda + \alpha - \lambda - \alpha ln(\frac{\alpha}{\lambda}) = \alpha - \alpha ln(\frac{\alpha}{\lambda}) = \alpha - \alpha ln(\frac{\alpha}{\lambda})$

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (T_n)^{\frac{1}{n}} = e^{\alpha} (\frac{\lambda}{\alpha})^{\alpha}}$