PSI* 2024-2025, Devoir surveillé de Mathématiques n°8

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot FIN à la fin de votre composition
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, encadrer les résultats.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Exercice 1

On considère la fonction $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2y-3xy-y^2 \end{array}$

1°) a) Calculer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$

1°) b) Calculer la matrice Hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$

2°) Déterminer les points critiques de f.
Remarque : on trouvera 3 points dont le point $A=(\frac{3}{2},\frac{-9}{8})$

3°) a) Le point A est-il un extremum local de f ?

3°) b) Les autres points critiques de f sont-ils des extremums locaux de f ?

On pose $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ x^2+y^2\leq 1\}$ et $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ x^2+y^2=1\}$

4°) a) Montrer que D est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

4°) b) Montrer que g, la restriction de f à D, admet un maximum global sur D et que celui-ci est atteint sur C.

Exercice 2

On considère la fonction $\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$

1°) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

2°) Montrer que f admet une dérivée partielle selon x en $(0,0)$ et calculer cette dérivée partielle $(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0)$

On admet que f admet aussi une dérivée partielle selon y en $(0,0)$ et que $(\frac{\partial f}{\partial y})(0,0) = 0$

3°) a) Calculer $(\frac{\partial f}{\partial x})(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

3°) b) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3

Dans cette exercice on munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique, noté $<,>$ et de la norme associée, notée $||.||$.
On pose : $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

1°) **Etude d'un exemple**

On pose : $\begin{array}{rccl} r & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & \frac{xy+z^2}{x^2+y^2+z^2} \end{array}$

a) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ et $\frac{-1}{2}(x^2+y^2) \leq xy$
b) Déduire du a), que $\frac{-1}{2}$ est un minorant de r sur D et montrer que c'est son minimum.
c) Trouver, de même, le maximum de r sur D.
d) Déterminer le spectre de $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et comparer le maximum et le minimum de r sur D à la plus grande et à la plus petite valeur propre de A.

2°) **Cas général**
Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
a) Justifier l'existence de (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et de trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ et $\forall i \in [\![1;3]\!]$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$
b) Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$
Montrer que : $\frac{<f(u),u>}{||u||^2} = \lambda_3 + \frac{x^2(\lambda_1-\lambda_3)}{||u||^2} + \frac{y^2(\lambda_2-\lambda_3)}{||u||^2}$

c) En déduire que λ_3 est le maximum de la fonction $\begin{array}{rccl} r & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \frac{<f(u),u>}{||u||^2} \end{array}$

d) Déterminer de même le minimum de r sur D.

3°) **Exemple** ($\star$)
Déterminer le maximum de $g : (x,y,z) \mapsto \frac{-x+y+2z}{x^2+y^2+z^2}$ sur $P = \{(x,y,z) \in D \ , \ x+y+2z = 1\}$