PSI* 2024-2025, Mathématiques DS n°8 : Correction

Exercice n°1 : 16 points

1°) a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ donc son gradient est bien défini.

Par définition : $\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - 3y \\ x^2 - 3x - 2y \end{pmatrix}}$

1°) b) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ donc sa Hessienne est bien définie.

Par définition : $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x,y) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(x,y) \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(x,y) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y) \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x-3 \\ 2x-3 & -2 \end{pmatrix}}$

Barème 1°)a) et 1°)b) : définition gradient et Hessienne : 1 point, C^1 et C^2 : 1 point, calcul : 1 point

2°) (x,y) point critique de $f \Leftrightarrow \nabla(f)(x,y) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 3y = 0 \\ x^2 - 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(2x-3) = 0 \\ x^2 - 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} - 3\frac{3}{2} - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{-9}{8} \end{cases}$$

$\boxed{f \text{ admet donc trois points critiques : } O = (0,0),\ T = (3,0) \text{ et } A = (\tfrac{3}{2}, \tfrac{-9}{8})}$

Barème : définition 1 point, calculs 2 points (1 point si bonne méthode et petite erreur), -1 si pas de conclusion encadrée

3°) a) Avec le 1°) b) $H(f)(A) = \begin{pmatrix} \frac{-9}{4} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Donc $det(H(f)(A) = \frac{9}{2} > 0$ et $tr(H(f)(A)) = \frac{-17}{4} < 0$. Comme A est un point critique, alors on sait d'après le cours que : $\boxed{f \text{ admet un maximum local en } A}$

Barème : Idée Hessienne : 1 point, les 3 arguments (pt crit., tr et det) : 1 point, concl. : 1 point

3°) b) • $H(f)(O) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ donc $det(H(f)(0,0)) = -9 < 0$. Comme O est un point critique, alors, d'après le cours, f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$.

• $H(f)(T) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ donc $det(H(f)(3,0)) = -9 < 0$. Comme T est un point critique, alors, d'après le cours, f n'admet pas d'extremum en $(3,0)$.

• $\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local aux points critiques différent de } A.}$

Barème : 1 point méthode, 1 point conclusion claire

4°) a) D est l'image réciproque de $]-\infty, 0]$ (qui est fermé) par l'application continue sur $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \mapsto x^2+y^2-1$, donc d'après le cours : $\boxed{D \text{ est une partie fermée de } \mathbb{R}^2.}$

Barème : 2 points (1 idée, 1 rédaction)

4°) b) g est de classe C^1 sur D qui est fermée bornée, donc d'après le cours, g atteint son maximum sur D, soit en un point critique, à l'intérieur de D, soit sur C le bord de D.
L'étude du 3°) permet de voir que g n'admet pas d'extremum local sur D ($A \notin D$), donc :
$\boxed{g \text{ atteint son maximum sur } D \text{ en un point de } C.}$

Barème : théorème complet 2 points, application 1 point

Exercice n°2 : 8 points

1°) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{|x^3|}{x^2+y^2} = |x| \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq |x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ et donc $\boxed{f \text{ continue en } (0,0)}$

Barème : 1 point définiton, 1 point majoration, 1 point conclusion

2°) Pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \neq 0$: $\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)}{t} = \frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$

On en déduit que : $\boxed{f \text{ admet une dérivée partielle selon } x \text{ en } (0,0) \text{ et } (\frac{\partial f}{\partial x})(0,0) = 1}$

Barème : 1 point définition, 1 point calcul et conclusion

3°) a) On a f qui est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ privé de $(0,0)$ et pour (x,y) $\mathbb{R}^2$ tel que $(x,y) \neq (0,0)$ on a :
$(\frac{\partial f}{\partial x})(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)-x^3(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Donc : $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\ ,\ (\frac{\partial f}{\partial x})(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}}$

Barème : si il y a un résultat encadré juste : 1 point, sinon 0

3°) b) Pour $y \neq 0$, on a : $(\frac{\partial f}{\partial x})(0,y) = \frac{0}{(y^2)^2} = 0 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0 \neq 1 = (\frac{\partial f}{\partial x})(0,0)$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$
Barème : 1 point idée, 1 point calcul

Exercice n°3 : 22 points

1°) a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$0 \leq (x+y)^2 \Rightarrow 0 \leq x^2+y^2+2xy \Rightarrow -(x^2+y^2) \leq 2xy \Rightarrow -\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy$

$0 \leq (x-y)^2 \Rightarrow 0 \leq x^2+y^2-2xy \Rightarrow 2xy \leq x^2+y^2 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

On a donc : $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \text{ et } \frac{-1}{2}(x^2+y^2) \leq xy}$

Barème : 2 points (un par inégalité, 1 si pas de conclusion propre)

1°) b) Soit $(x, y, z) \in D$.
Comme $\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} \geq 0$ alors $\frac{xy}{x^2+y^2+z^2} \leq r(x, y, z)$
On utilise alors le a) pour avoir : $\frac{\frac{-1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2} \leq r(x, y, z)$
Et comme $0 \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} \leq 1$ alors $\frac{-1}{2} \leq r(x, y, z)$
Donc $\frac{-1}{2}$ est un minorant de r sur D.
De plus pour $x \neq 0$, $r(x, -x, 0) = \frac{-x^2}{x^2+x^2} = \frac{-1}{2}$, donc la borne inférieure est atteinte.

$\boxed{\frac{-1}{2} \text{ est un minorant de } r \text{ sur } D \text{ et c'est son minimum.}}$

Barème : 2 points pour montrer que majorant, 1 point pour montrer que le minorant atteint, 1 point pour conclure

1°) c) On a, avec le a) : $r(x, y, z) \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)+z^2}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{(x^2+y^2)+z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1$
Donc 1 est un majorant de r
De plus, pour $z \neq 0$, $r(0, 0, z) = \frac{z^2}{z^2} = 1$ donc le majorant est atteint.

$\boxed{1 \text{ est un majorant de } r \text{ sur } D \text{ et c'est son maximum.}}$

Barème : 1 point idée et résultat, 1 point rédaction

1°) d) • Le polynôme caractéristique de A vaut :
$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & X & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - \frac{1}{4}) = (X-1)(X - \frac{1}{2})(X + \frac{1}{2})$$
Donc : $\boxed{sp(A) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\}}$

• On a donc immédiatement que :
$\boxed{\text{le maximum et le minimum de } r \text{ sur } D \text{ sont la plus grande et à la plus petite valeur propre de } A.}$

Barème : Valeurs propres de A : 1 point, comparaison au extremum de r : 1 point

2°) a) M est une matrice symétrique réelle, on peut donc utiliser le théorème spectral, qui affirme qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée pour le produit scalaire canonique.
Autrement dit que : Il existe (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que : $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et $\forall i \in [\![1; 3]\!]$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$

Barème : 1 point pour cité le thm spectral, 1 point pour rappeller l'hypothèse symétrique réelle (les 2)

2°) b) Avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\frac{<f(u),u>}{||u||^2} = \frac{<x\lambda_1 e_1 + y\lambda_2 e_2 + z\lambda_3 e_3, xe_1+ye_2+ze_3>}{||u||^2} &= \frac{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2}{||u||^2} \\
&= \frac{(\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_3)x^2 + (\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_3)y^2 + \lambda_3 z^2}{||u||^2} \\
&= \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)x^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)y^2 + \lambda_3(x^2+y^2+z^{||u||^2} 2)}{||u||^2} = \lambda_3 + \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)x^2}{||u||^2} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)y^2}{||u||^2}
\end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{\frac{<f(u),u>}{||u||^2} = \lambda_3 + \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)x^2}{||u||^2} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)y^2}{||u||^2}}$

Barème : 2 points si calculs justes et conclusion

2°) c) Avec le 2°) b) : $\frac{<f(u),u>}{||u||^2} = \lambda_3 + \underbrace{\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)x^2}{||u||^2}}_{\leq 0} + \underbrace{\frac{(\lambda_2 - \lambda_3)y^2}{||u||^2}}_{\leq 0} \leq \lambda_3$

λ_3 est donc un majorant de la fonction r sur D.
On a utilise pour l'inégalité ci-dessus que : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ donc $\lambda_1 - \lambda_3 \leq 0$ et $\lambda_2 - \lambda_3 \leq 0$

De plus, si $u = (0, 0, z)$ avec $z \neq 0$ alors $r(u) = \lambda_3$ donc le majorant est atteint.

On a donc : $\boxed{\lambda_3 \text{ est le maximum de } r \text{ sur } D.}$

Barème : Méthode 1 point, majorant : 1 point, atteint : 1 point

2°) d) Comme au b) on a : $\frac{<f(u),u>}{||u||^2} = \lambda_1 + \frac{(\lambda_2-\lambda_1)y^2}{||u||^2} + \frac{(\lambda_3-\lambda_1)z^2}{||u||^2}$
et de la même manière on montre que : $\boxed{\lambda_1 \text{ est le minimum de } r \text{ sur } D.}$

Barème : 1 point

3°) • On va repprendre les notations du 2°).

Si $(x, y, z) \in P$ alors, $g(x, y, z) = \frac{-x+y+2z}{x^2+y^2+z^2} = \frac{(-x+y+2z)\overbrace{(x + y + 2z)}^{=1}}{x^2+y^2+z^2}$ car $(x, y, z) \in P$

Donc $g(x, y, z) = \frac{-x^2+y^2+4z^2+4yy}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{x^2+y^2+z^2} = r(x, y, z)$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

• Le polynôme caractéristique de A vaut :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & -2 \\ 0 & -2 & X-4 \end{vmatrix} = (X+1)(X^2 - 5X) = (X+1)X(X-5)$$

Donc le spectre de A vaut $sp(A) = \{-1, 0, 5\}$
On déduit du 2°) que : $\forall (x, y, z) \in D\ ,\ r(x, y, z) \leq 5$ donc : $\forall (x, y, z) \in P\ ,\ g(x, y, z) \leq 5$
5 est un majorant de g sur P.

• $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in ker(A - 5I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -6x = 0 \\ -4y + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2y$

On a donc $e_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in ker(A - 5I_3)$
Mais $0 + \frac{1}{5} + 2\frac{2}{5} = 1$ donc $e_1 \in P$
On a alors (calculs fait au 2°)) : $g(e_1) = g(0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}) = 5$ donc la valeur du majorant 5 est atteinte sur P.

Donc : $\boxed{\text{Le maximum de } g \text{ sur } P \text{ vaut } 5.}$

Barème : 4 points (libre)