Feuille d'exercices n°70 : Révisions

Exercice 507 *Norme subordonnée*
Soit $(E, ||.||)$ *un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel normé de dimension finie. On pose* $S = \{x \in E \ , \ ||x|| = 1\}$.
Pour $u \in L(E)$, *on pose :* $N(u) = \sup\limits_{x \in S} ||u(x)||$

1) Montrer que N *est une norme sur* $L(E)$.
2) Montrer que si f *et* g *sont dans* $L(E)$ *alors :* $N(f \circ g) \leq N(f)N(g)$
3) Si $f \in L(E)$, *alors montrer que :* $\lambda \in sp(f) \Rightarrow |\lambda| \leq N(f)$
4) On suppose que $f \in L(E)$ *et* $N(f)) < 1$
a) Montrer que : $f^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0_{L(E)}$
b) Montrer que $Id_E - f$ *est inversible.*

Exercice 508 *On pose* $E = M_n(\mathbb{C})$ *et pour tout élément* M *de* E *on notera* $[M]_{i,j}$ *son* (i, j)*-ième coefficient.*
On pose $\forall A \in E \ , \ N(A) = n \sup\limits_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} |[A]_{i,j}|$

1) Montrer que N *est une norme sur* E.

2) Montrer que : $\forall (A, B)) \in E^2 \ , \ N(AB) \leq N(A)N(B)$

3) Montrer que pour tout $A \in E$, *on peut poser* $exp(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

4) Exemples
a) Calculer $exp(I_n)$ *b) Calculer* $exp(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *c) Calculer* $exp(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5) a) Soit A *et* B *deux matrices semblable telle que :* $A = PBP^{-1}$ *avec* $P \in GL_n(\mathbb{R})$
Montrer que : $exp(A) = Pexp(B)P^{-1}$
5°) b) Calculer $exp(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix})$

6°) Montrer que : $det(exp(A)) = exp(tr(A))$ *et en déduire que* $exp(A)$ *est inversible.*

7°) Soit $(A, B) \in E^2 \ , \ AB = BA$.
Montrer que $exp(A + B) = exp(A)exp(B)$ *et en déduire l'inverse de* $exp(A)$.

8°) Soit $A \in E$. *On pose* $\forall t \in \mathbb{R} \ , \ \varphi(t) = exp(tA)$
a) En raisonnant terme par terme, montrer que φ *est dérivable et que :* $\forall t \in \mathbb{R}$
$\varphi'(t) = Aexp(tA) = exp(tA)A$
b) On considère le système différentiel (E) *:* $X'(t) = AX(t)$
Montrer que les solutions de (E) *s'écrivent* $X(t) = exp(tA)X_0$ *avec* $X_0 \in M_n(\mathbb{C})$

9°) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$, *si* A *est diagonalisable et si* $sp(A) \subset]-\infty, 0[$ *alors les solutions de* $X'(t) = AX(t)$ *tendent vers le vecteur nul en* $+\infty$.