Feuille d'exercices n°68+1 : Révisions

Exercice 504

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iz^2 + (-1-3i)z - 6 + 6i = 0$. (3 pts)
2. En nommant z_1 et z_2 les solutions de l'équation ci-dessus, déterminer tous les complexes z tels que $|z - z_1| = |z - z_2|$ en interprétant géométriquement les résultats et en donnant l'expression du lieu géométrique. (2 pts)
3. Représenter sur votre copie, à main levée le domaine défini par : (3 pts)

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < 4\ ,\ arg(z) \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] \right\}$$

Exercice 505

Soit λ dans $\mathbb{R}_+^\star$ et $u_n = \exp(-(\ln n)^\lambda)$ pour n dans $\mathbb{N}^\star$. On s'intéresse à la nature de la série de terme général u_n, notée $\sum_{n\geq 1} u_n$, suivant la valeur de λ.

9. La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est-elle convergente ? *(Aucune justification n'est demandée ici.)*
10. En déduire que, si λ vaut 1, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
11. Montrer que pour tout $n \geq 3$ fixé, la fonction $\lambda \mapsto \exp(-(\ln n)^\lambda)$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
12. En déduire que pour tout $\lambda < 1$, $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
13. Soit $\lambda > 1$. Montrer que si $n \geq \exp\left(\frac{2}{\lambda - 1}\right)$, alors $u_n \leq \frac{1}{n^2}$.
14. En déduire que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge si $\lambda > 1$.

Exercice 506

Déterminer les fonctions x, y et z vérifiant le système d'équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & -3x(t) & + & 2y(t) & + & 3z(t) \\ y'(t) & = & -2x(t) & + & y(t) & + & 3z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & + & 2y(t) & + & 2z(t) \end{array} \right.$$

avec : $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 1$.