Feuille d'exercices n°71 : Révisions

Exercice 510 *Soit p et q deux nombres entiers naturels non nuls. On pose $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^q$.*
Soit B la base canonique de E et C celle de F.
Soit $u \in L(E,F)$ et A la matrice de u relativement à B et C.
On pose $r = rg(u)$

1°) Exemple

Déterminer A le cas ou f est définie par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+y-2z, x-y+z)$

2°) a) Que dire de p, q et r dans le cas général.
2°) b) Que dire dans le cas ou u est injective ?
2°) c) Que dire dans le cas ou u est surjective ?
2°) d) Que dire dans le cas ou u est bijective ?

3°) Montrer qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{R})$ et $Q \in GL_q(\mathbb{R})$ telle que $A = QJ_rP^{-1}$ avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou l'on précisera la taille des matrices de zéros.

4°) Déterminer P et Q dans le cas du 1°).

Exercice 511 *a) Etudier la convergence de $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{sh(t)} - \frac{1}{t}\right)dt$*
b) Etudier la convergence de $I = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{sh(t)} - \frac{1}{t}\right)dt$
c) Etudier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{sh(t)} - \frac{1}{t}\right)dt$

Exercice 512 *Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}dt$*

Exercice 513 *Montrer que $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{sin(x)}$ est de classe C^∞ sur $]-\pi,\pi[$*

Exercice 514 *On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$*
a) Déterminer R le rayon de convergence de f.
b) Etudier la convergence de $f(R)$ et de $f(-R)$.

Exercice 515 *Etudier suivant $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence de $\sum \frac{(ln(n))^\alpha}{n}$*

Exercice 516 *Généralisation de l'inégalité de Markov*
Soit X une variable aléatoire discrète et φ une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$
On suppose que $\varphi(X)$ est d'espérance finie. Soit $\varepsilon > 0$.
Montrer que : $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\varphi(X))}{\varphi(\varepsilon)}$

Exercice 517 *Soit $a > 0$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$*
a) Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$.
b) A quelle condition sur a la convergence est-elle uniforme ?