Feuille d'exercices n°72 : Préparation aux oraux

Exercice 1 : Oral ccINP 2023

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $u_n = \text{tr}(A^n)$

1) En utilisant un polynôme annulateur de A de degré 3, donner une relation linéaire entre u_{n+2} , u_{n+1} et u_n .

En déduire une expression de u_n en fonction de n .

2) Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$

Trouver une relation entre les valeurs propres de A et u_n .

3) Nature de $\sum u_n$

Exercice 2 : Oral ccINP 2024

Soit $n \geq 2$ et A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et donner ses valeurs propres.

b) Quel est la dimension de l'espace vectoriel engendrée par la famille $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

c) Calculer le déterminant de A .

d) On pose $B_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} A^k}{n}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n$

Exercice 3 : Oral ccINP 2024

Soit a un réel strictement positif.

1) Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt$ est convergente.

2) Montrer l'existence et calculer $\int_0^1 t^{na} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$

3) On donne l'égalité $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}$

3)a) Peut-on montrer cette égalité à l'aide de la convergence uniforme ?

3)b) Peut-on montrer cette égalité grâce à la majoration du reste ?

3)c) Peut-on montrer cette égalité par le théorème d'intégration terme à terme ?

4) Que donne cette égalité pour $a = 1$?

Exercice 4 : Oral ccINP 2024

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire indépendantes et suivant toute une loi de Bernoulli de paramètre p . Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

1) Déterminer la loi de S_n .

2) Calculer $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$

Soit N une variable aléatoire telle que $N+1$ suive une loi géométrique de paramètre p .

On considère une urne contenant une boule rouge et une boule verte indiscernable au toucher.

On effectue N tirages avec remise et on note X le nombre de boules vertes tirées.

3) Déterminer la loi de X .

Exercice 5 : Oral ccINP 2024

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$

Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et démontrer qu'elle converge vers 0.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$$

Justifier la convergence de la série $\sum v_n$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$

Étudier la convergence de la série $\sum w_n$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$

Étudier la convergence de la série $\sum x_n$.