Feuille d'exercices posés aux oraux 2024 aux élèves de PSI* de La-Fayette

1 ccINP

Planche 1. ccINP *(Lajoignie Maxime)*

Exercice 1

Un joueur effectue une suite de Pile ou Face indépendants, la probabilité d'obtenir Pile est de $p \in]0,1[$, celle d'obtenir Face de $q = 1-p$.
On note N la variable aléatoire correspondant au rang du premier pile.
Lorsque $N = n$, on place n boules numérotées de 1 à n dans une urne.
Le joueur tire un boule de manière équiprobable dans l'urne et il gagne si elle est impaire.
On note X la variable aléatoire correspondant à la valeur de la boule tirée.

1) Montrer que : $\sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int\limits_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$ pour $x \in]0,1[$

On admet de même que : $\sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int\limits_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$ pour $x \in]0,1[$

2) Reconnaître la loi de N.

3) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = 2k+1) = \sum\limits_{n=2k+1}^{+\infty} P(X = 2k+1 | N = n) P(N = n)$

Montrer, en séparant en somme paire et impaire que :

$P(X = 2k+1) = \frac{p}{q} [\sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} + \sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j}]$

4) On admet que : $\frac{1}{(1-t^2)(1-t)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} + \frac{2}{(1-t)^2}\right)$

Calculer $P(A)$ avec A l'événement le joueur gagne.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

1) Déterminer le spectre de A.
2) A est elle diagonalisable ?
3) Réduire A

Planche 2. ccINP (Noé Thomas)

Exercice 1

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et $\forall (P,Q) \in E^2$, $\varphi(P,Q) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)dt$

1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

2) Déterminer pour tout n entier, $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^n dt$

3) Calculer $I = \inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)dt$

4) Soit $n \geq 2$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ , \ \int\limits_0^{+\infty} te^{-t}P(t)dt = 0\}$

Montrer que H est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer la distance d entre $X - 1$ et H.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ et $E = M_n(\mathbb{R})$, $S_n(R) = \{M \in E \ , \ M = M^t\}$ et $A_n(R) = \{M \in E \ , \ M = -M^T\}$.

a) Montrer que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

b) `Déterminer` φ `la projection sur` $S_n(\mathbb{R})$ `parallèlement à` $A_n(\mathbb{R})$.

Planche 3. ccINP (Evangelista William)

Exercice 1

Soit $n \geq 2$ et $(a,b) \in M_n(\mathbb{R})$ telles que : $AB - BA = A$

On pose pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, $f(X) = XB - BX$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$

2) Calculer la trace de A puis la trace de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$

Exercice 2

Soit $(E) \Leftrightarrow x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0$

a) Trouver les solutions DSE_0 de (E).

b) Pourquoi y-a-t-il d'autres solutions sur $]0,1[$?

c) En utilisant $y(x) = \frac{z(x)}{x-1}$ trouver toute les solutions sur $]0,1[$.

Planche 4. ccINP (Fontbonne Océane et Tobilov Aboumouslim)

Exercice 1

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = Id_E$ et $f \neq Id_E$.

1) Montrer que 1 est valeur propre de f.

2) Montrer que $E = ker(f - Id_E) \oplus ker(f^2 + f + Id_E)$

3) Montrer qu'il existe une base B de E telle que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit $I =]0, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < 1$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I$, $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$

1) Montrer la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f que l'on précisera.

2) Montrer que $y \mapsto ye^{-y}$ est bornée sur I

3) Montrer la convergence uniforme de la suite (f_n) sur I.

4) Calculer $\int\limits_0^1 x(1 + n^\alpha e^{-nx})dx$

Planche 5. ccINP (Mathieu Testeil)

Exercice 1

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int\limits_0^1 ln(1 + t^n)dt$

1) Montrer que I_n est bien définie.

2) Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.

3) Montrer que : $I_n \sim \frac{1}{n} \int\limits_0^1 \frac{ln(1+u)}{u} du$

4) Sachant que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ montrer que : $I_n \sim \frac{???}{12}$

Exercice 2 (déjà tombé en 2023)

Soit une suite de variable aléatoire `indépendantes` $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
On suppose que chaque X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_k \in]0,1[$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}$.
a) Donner l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.
b) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) = 0$
Soit $\varepsilon > 0$.
c) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - P_n\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = 0$
On suppose que : $\lim_{n\to+\infty} P_n = p$.
d) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon) = 0$

Planche 6. ccINP (Maeva Cluzel)

Exercice 1

On pose pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u_n(x) = \frac{ln(x)}{x^n ln(n)}$

1) Déterminer le domaine de définition D de $\sum u_n(x)$.

On note $S = \sum_{n\geq 2} u_n$

2) Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement vers S sur D.

3) a) Montrer que pour $n \geq 2$: $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \frac{1}{ln(n+1)}$

3) b) En déduire que S est continue sur D.

4) S est-elle intégrable sur D ?
Si oui, donner la valeur de $\int_D S$ en admettant que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 2

1) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$

2) Avec les notations du 1), démontrer l'unicité de B.

3) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ Montrer que $\exists (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{+}(\mathbb{R})$, $M = OS$

4) Montrer l'unicité du couple ci-dessus.

Planche 7. ccINP (Kieran Pinot-Bigeard)

Exercice 1

On pose : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{k,n} = \int\limits_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$

1) Montrer l'existence des $I_{k,n}$

2) Calculer les $I_{k,n}$

3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$

4) a) Nature de $\sum a_n e^n$

4) b) Nature de $\sum a_n (-e)^n$

4) c) Domaine de définition de $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$, $P(X = k \cap Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

2) Déterminer le DSE_0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

3) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$

4) Déterminer la loi de X.

5) Les variables aléatoires X et Y sont-elle indépendantes ?

Planche 8. ccINP (Antoine Lafaye et Alexandre Gorsse) (déjà posé en 2023 - les 2 exos)

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

1) Justifier que A admet un vecteur propre unitaire $X \in M_{,1}(\mathbb{R})$

On pose $B = \begin{pmatrix} A & XX^T \\ XX^T & A \end{pmatrix}$

2) Soit $Y_a = \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$

Trouver les valeurs de a pour lesquels Y_a est un vecteur propre de B.

3) Justifier que B est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de B.

4) Application avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{cos(nx)}{n^3+x^2}$

1) Donner la définition de la norme infinie.

2) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Planche 9. ccINP (Bonfanti Matéo)

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$

On définit la suite (a_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(4n+2)a_{n+1} = (n+1)a_n$

2) Déterminer le rayon de convergence R de f.

3) Montrer que f vérifie l'équation différentielle : $x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) = -2$ sur $]-R, R[$

4) Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{\sqrt{4-x}}{x^{3/2}}$ sur $]0, 4[$

5) En déduire l'expression de f sur $]0, 4[$.

On pourra chercher a et b dans $\mathbb{R}$ tels que : $\frac{x+2}{x(4-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{4-x}$

6) Déterminer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Exercice 2

soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = tr(AM)I_n$

1) Calculer φ^2 en fonction de φ

2) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'endomorphisme φ soit diagonalisable.

Planche 10. ccINP (Grisard Jade)

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est inversible $\Leftrightarrow 0 \notin sp(A)$

2) Calculer le rang de B en fonction de n et du rang de A.

3) Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.

4) Montrer que : $x^2 \in sp(A) \Leftrightarrow\Rightarrow x \in sp(B)$

5) Montre que si A est inversible avec n valeurs propres distinctes, alors B est diagonalisable.

Exercice 2

ne se rappelle plus ...

Planche 11. ccINP (SHEIHOSSEN Maxime)

Exercice 1

Soit $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} ln(n)x^n$ et $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} ln(1-\frac{1}{n})x^n$

1) Déterminer les rayons de convergences de f et de g.

2) Montrer que g est continue sur $[-1, 1[$

3) Etablir une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.

4) Montrer que f est prolongeable par continuité en -1.

5) Equivalents de f et de g en -1.

Exercice 2

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $M^3 = I_n$, $MM^T = M^TM$ et $M \neq I_n$

1) Montrer que M^TM est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer son spectre.

2) Montrer que M est une matrice orthogonale.

3) Si $n = 3$ étudier M

Planche 12. ccINP (SAUVAITRE Sidonie)

Exercice 1

Soit φ une application qui a un polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe $\varphi(P)$ le reste de la division euclidienne de X^2P par X^4-1.

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique qui sera notée A.
3. Démontrer que φ est diagonalisable.
4. Déterminer les valeurs propres de φ.
5. Déterminer les sous espaces propres de φ.
6. Est-ce que A est inversible ? Le cas échéant exprimer A^{-1}.
7. L'endomorphisme φ est-il un automorphisme ?

Exercice 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie par
$\forall x \geq 0, f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$
$\forall x \leq 0, f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Planche 13. ccINP (VALOT Alexandre)

Exercice 1

On pose $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

1) Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$
2) Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$
3) Montrer que : $\forall x > 1$, $f(x) = xf(x-1)$

Pour $n \geq 2$, on pose $v_n = \int\limits_{n-1}^{n} ln(f(u))du$ et pour $x > 1$ on pose : $\Phi(x) = \int\limits_{x-1}^{x} ln(f(u))du$

4) Montrer que Φ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer Φ'
5) En déduire la limite de Φ en $+\infty$
6) Déterminer la nature de $\sum(-1)^n v_n$
6) Déterminer la nature de $\sum(-1)^n \frac{1}{v_n}$

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $p \in L(E)$ un projecteur.

1) Montrer que : $E = ker(p) \oplus Im(p)$

2) Montrer que : $rg(p) = tr(p)$

Planche 14. ccINP (ASSAFARI Fatima)

Exercice 1

Soit α un réel.

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ \alpha & -2\alpha & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

Q1. Pour quelles valeurs de α M_α est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer le rang de M_α.

Q3. Déterminer P tel que $M_{-1} = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

On veut résoudre $A^2 = M_{-1}$.

Q4. (a) Montrer que $A^2 = M_{-1} \Leftrightarrow B^2 = \Delta$ avec B à préciser.

(b) Montrer que $B^2 = \Delta \Rightarrow B$ et Δ commutent.

(c) En déduire B telle que $B^2 = \Delta$.

(d) Résoudre $A^2 = M_{-1}$.

Exercice 2

$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} sin(xt)dt$

Q1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.

Q2. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Q3. Calculer $\varphi'(x)$ et déterminer $\varphi(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Planche 15. ccINP (DELESSALLE)

Exercice 1

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que : $u^3 = -u$

1) Montrer que : $Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \subset ker(u)$

2) Montrer que : $\mathbb{R}^3 = Ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus ker(u)$

3) Montrer que 0 est la seule valeur propre de u.
En déduire que : $ker(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

4) En déduire qu'il existe une base B de $\mathbb{R}^3$ telle la matrice de u relativement à B s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Notons $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}dx$

1) Montrer l'existence de J.

2) Montrer que $J = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$

---

2 Mines télécom

Planche 16. Mines-Télécom (Sheikossen Maxime)

Exercice 1

Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 + I_n$ ne soit pas inversible et $tr(M) = 1$

1) Montrer que : $M + iI_n$ et $M - iI_n$ ne sont pas inversibles.

2) M est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$?

Exercice 2

1) Montrer que : $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}dt$ est bien définie.

2) On admet que : $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Montrer que : $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

Planche 17. Mines-Télécom (Testeil Mathieu)

Exercice 1

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(\frac{t}{n})}{t(1+t^2)}dt$

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|sin(x)| \leq |x|$

b) Montrer que I_n est bien définie.

c) Montrer que : $\lim\limits_{n_t o+\infty} I_n = 0$

d) Déterminer un équivalent de I_n en $+\infty$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $(A, B) \in M_n(\mathbb{R}^2)^2$ telle que : $AB - BA = \alpha A$

a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k B - BA^k = \alpha k A^k$

b) Montrer qu'il existe $k \in N^*$, $A^k = 0$

Planche 18. Mines-Télécom (Aboumouslim Tobilov)

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n et $f \in L(E)$ tel que $f^2 = 4Id_E$

1) Montrer que f est un automorphisme et exprimer f^{-1}.

2) Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?

3) f est-il diagonalisable ?

4) Montrer que : $Im(f - 2Id_E) \subset ker(f + 2Id_E)$

5) On suppose que : $det(f) = 16$ et $tr(f) > 0$. Que dire de n et de f ?

Exercice 2

On admet que : $\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} cos(xt) dt$

a) Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f vérifie l'équation différentielle : $2y'(x) + xy(x) = 0$

c) Déterminer $f(x)$.

Planche 19. Mines-Télécom (Bonfanti Matéo)

Exercice 1

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.

Calculer $\inf\limits_{M=(m_{i,j}) \in S_n(\mathbb{R})} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (m_{i,j} - a_{i,j})^2$

Exercice 2

On pose : $\forall n \geq 2$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & I = [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{xe^{-nx}}{ln(n)} \end{array}$

1) Montrer que $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n$ converge simplement . On notera $f = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n$.

2) Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur I, puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

3) Etudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur I

4) Montrer la continuité de f sur I.

5) Etudier la dérivabilité de f.

Planche 20. Mines Télécom (Maeva Cluzel)

Exercice 1

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$

1) Montrer que (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n
Déterminer $\lim_{n_to+\infty} nI_n$

3) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

Exercice 2

On pose $V = \{M \in M_2(\mathbb{R})\ ,\ \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2\ ,\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix}\}$

1) Montrer que V est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$

2) Montrer que : $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R})\ ,\ < A, B >= tr(A^T B)$ est un produit scalaire sur $M_2(\mathbb{R})$

3) Déterminer une base orthonormée de $V^\perp$.

4) Déterminer le projeté orthogonale de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sur $V^\perp$

5) Déterminer la distance de A à V.

Planche 21. Mines-Télécom (Evangelista William)

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Donner quatre méthodes pour montrer que A est diagonalisable.

2) Résoudre $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = -x + y - z \\ z' = x - y + z \end{cases}$

Exercice 2

Soit $g(x) = \int\limits_0^1 t^x \frac{t-1}{ln(t)} dt$

1) Montrer que g est définie sur $]-1, +\infty[$

2) Montrer que g est C^1 sur $]-1, +\infty[$

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

Planche 22. Mines-Télécom (Grisard Jade)

Exercice 1 : Idem Mathieu Testeil.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, muni de la base orthonormée canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminer A, la matrice, relativement à B, de la rotation d'axe D : $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ qui transforme e_2 en $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$.

Planche 23. Mines-Télécom (SAUVAITRE Sidonie)

Exercice 1

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et les matrices suivantes d'ordre p (avec $p \geq 2$)

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

I_p matrice identité d'ordre p

a. Que peut-on dire de $M(a,b)$?

b. Montrer que 0 est valeur propre de N. Trouver une matrice P inversible et D une matrice diagonale telles que $N = PDP^{-1}$.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) tel que $M(a,b)$ soit inversible et calculer $[M(a,b)]^{-1}$.

Exercice 2

Soit $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\Phi_n(t) = \frac{e^t}{1+t^n}$.

On pose pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \int\limits_0^x \Phi_n(t)dt$.

1. a. Etudier f_n sur $\mathbb{R}_+$ (tableau de variations et limites).

1. b. Soit a un réel `positif`. Montrer qu'il existe un unique $x_n(a)$ tel que $\int\limits_0^{x_n(a)} \Phi_n(t)dt = a$.

2. Déterminer $\lim\limits_{a\to+\infty} x_n(a)$.

3. Soit $A < 1$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^A \Phi_n(t)dt = e^A - 1$.

4. Soit $A \geq 1$, étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^A \Phi_n(t)dt$.

Planche 24. Mines-Télécom (ASSAFARI Fatima)

Exercice 1

`On définit la suite` $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$

On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$

Q1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq n!$ et en déduire que S est définie sur $I =]-1,1[$

Q2. Montrer que $\forall x \in I$, $S'(x) = (1+x)S(x)$

Q3. Déterminer S et en déduire a_n.

Q4. ?

Exercice 2

Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. telle que $tr(A) = 0$ et $(A - I_n)$ non inversible.
Q1. Déterminer les valeurs propres et leur ordre de multiplicité.
Q2. A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$?
Q3. Que dire de l'endomorphisme associé à A ?

---

3 Centrale

3.1 Centrale : mathématiques 1

Planche 25. Centrale Math 1 (Mathieu Testeil)

Exercice

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Si E est un événement on note 1_E la variable aléatoire définie par : $\forall \omega \in \Omega\ ,\ 1_E(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in E \\ 0 \text{ si } \omega \notin E \end{cases}$

1) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les variables aléatoires.

2) Soit A et B deux événements de $\mathscr{A}$.
Montrer que : $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$ en calculant $cov(1_A, 1_B)$

3) On note S_n l'ensemble des bijection de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; n]\!]$.
Si $\sigma \in S_n$, on dit que $i \in [\![1; n]\!]$ est un point fixe de σ si et seulement si $\sigma(i) = i$

On prend un élément de S_n de manière équiprobable.

On note E_i l'événement : i est un point fixe et F la variable aléatoire donnant le nombre de point fixe.

3) Calculer $\mathbb{P}(E_i)$, $\mathbb{P}(E_i \cap E_j)$ (pour $i \neq j$)

4) Calculer $\mathbb{E}(F)$

Planche 26. Centrale Math 1 (Bonfanti Matéo)

Exercice

On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. A chaque pas, on avance de 1 avec une probabilité de $p \in]0,1[$ ou de -1 avec une probabilité de $q = 1 - p$.
On définit la variable aléatoire X_n qui est égale à la position au n-ième ème tour.
On a suppose $X_0 = 0$.

a) Calculer $P(X_n = 0)$

b) Donner la nature de : $\sum P(X_n = 0)$

On définit B_n la variable aléatoire qui vaut 1 si $X_n = 0$ et 0 sinon.

Q2 a) Déterminer la loi de B_n et ... (visiblement question dure ...)
b) ? ? ? ? ?

Planche 27. Centrale Math 1 (Tobilov Aboumouslim)

Exercice
Soit $E = \mathbb{R}^n$ l'espace euclidien canonique. `Soit` $A \in M_n(\mathbb{R})$

1) On suppose, dans cette question seulement, qu'il existe $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = P\Delta Q$ avec Δ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont positifs ou nuls.

Montrer que les éléments diagonaux de Δ^2 sont les valeurs propres de $A^T A$. Que dire de la matrice Q ?

2) Montrer que $sp(A^T A) \subset \mathbb{R}^+$.

3) Montrer que le nombre de valeurs propres non nulles de $A^T A$, comptées avec leur ordre de multiplicité, sont égales à rang de A.

Question bonus : inégalité de Markov

3.2 Centrale : mathématiques 2

Planche 28. Centrale Math 2 *Testeil Mathieu*

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a > 0$, on note $S_a(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^a$

1) Redémontrer les résultats connus pour $S_1(n)$ et $S_3(n)$ sachant que $S_3(n) = (S_1(n))^2$

2) Ecrire un programme Python, qui prend en paramètre trois entiers a, b, et c avec $a > 0$, $b > 0$ et $c > 1$ et qui teste si pour tout $n \leq 20$ $S_a(n) = (S_b(n))^c$

3) Tester cette fonction pour tout $a \leq 20$, $b \leq 20$ et $c \leq 20$

4) On pose, pour tout $\alpha > -1$, pour tout $n > 1$: $a_n = \int\limits_0^n t^\alpha dt - \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k^\alpha + (k+1)^\alpha)$

4) a) Trouver un équivalent de $a_{n+1} - a_n$

4) b) Montrer que : $\forall c > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^c \sim \frac{n^{c+1}}{c+1}$

5) a) Montrer que si $S_a(n) = (S_b(n))^c$ avec $a > 0$, $b > 0$ et $c > 1$ alors $\begin{cases} a+1 = c(b+1) \\ a+1 = (b+1)^c \end{cases}$

5) b) Etudier $t \mapsto t^{\frac{1}{t-1}}$ sur $]1, +\infty[$

5) c) Montrer que les seules solutions entières du 5) a) sont celles conjecturées en 3).

Planche 29. Centrale Math 2 *(Bonfanti Matéo)*

Exercice

On aura : import numpy as np et import matplotlib.pyplot as plt

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$

Q1) Donner les 10 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$
Donner aussi les valeurs de $\frac{2}{u_n}$
Que peut on conjecturer pour la convergence de la suite (u_n) ?

Q2) Soit $t \in [0, \pi[$ et $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2-(n\pi)^2}$ et $g(t) = \frac{cos(t)}{sin(t)} - \frac{1}{t}$
a) Déterminer $\lim_{t \to 0} g(t)$
b) Montrer que f et g sont continue sur $[0, \pi[$.

Q3) Tracer g et f sur $[0, \pi[$. Que remarque-t-on ?
Pour la suite **on admet ce résultat**.

Q4) Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} ln(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2})$
Indication : on pourra définir $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ pour $x \in [0, \pi[$, intégrale que l'on pourra calculer de 2 manières différente.

Q5) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$

Planche 30. Centrale Math 2 *(Lajoignie Maxime)*

Exercice

On jette n boules de manière indépendantes dans N trous, elles atterrissent dans un trou avec une probabilité de $\frac{1}{N}$.
On note T_n la variable aléatoire comptant le nombre de trou non vide au n-ieme lancé.

1) Programmer une fonction **remplir**, de paramètre (n, N) qui crée une liste de taille N et simule n lancés (l'indice de la liste correspondant au numéro du trou) et renvoie la liste, avec le nombre de boules dans chaque trou.
Programmer une fonction **nonvide(n, N)** renvoyant le nombre de case non vide après n tirages.

Que devient $nonvide(10, n)$ pour n très grands ?

2) Donner les valeurs prises par T_n en fonction de n et N, en particulier exprimer les lois de T_1 et de de T_2.

3) a) Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = k)$ si $k > n$
3) b) Trouver une relation de récurrence sur les $\mathbb{P}(T_n = k)$

4) Ecrire une procédure $T(n, k, N)$ permettant de calculer $\mathbb{P}(T_n = k)$

5) En utilisant la question 1), sur un grand nombre d'expériences, tester $T(25, 8, 20)$

Planche 31. Centrale Math 2 *(Tobilov Aboumouslim)*

Exercice

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

1) a) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente.
`Donner une valeur approchée de sa somme à` 10^{-6} `près.`

1) b) Montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = ln(2)$

On réordonne la suite (u_n) en une suite (v_n) de telle sorte que les termes positifs soit rangés dans le même ordre, les termes négatifs soit rangés dans le même ordre et que deux termes positifs alternent avec un négatif.

Exemple : $(v_n)_{0\leq n\leq 8} = (1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{-1}{6})$

On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

2) a) `Ecrire une fonction Python, qui a` $n \in \mathbb{N}$ `associe` v_n

Indication : on pourra distinguer les cas $n = 3k$, $n = 3k+1$, $n = 3k+2$, ...

2) b) `Donnez les valeurs de` v_{250} `,` v_{251} `et` v_{252}`.`

2) c) `Donnez les valeurs de` σ_{250} `,` σ_{251} `et` σ_{252}.

2) d) `Conjecturer la valeur de` $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

3) Démontrer le résultat conjecturer en 2) d).
