Feuille d'exercices n°72 : Préparation aux oraux

Exercice 1 : Oral ccINP 2023

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $u_n = tr(A^n)$

1) En utilisant un polynôme annulateur de A de degré 3, donner une relation linéaire entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.
En déduire une expression de u_n en fonction de n.
2) Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$
Trouver une relation entre les valeurs propres de A et u_n.
3) Nature de $\sum u_n$

Exercice 2 : Oral ccINP 2024

Soit $n \geq 2$ et A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et donner ses valeurs propres.
b) Quel est la dimension de l'espace vectoriel engendrée par la famille $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
c) Calculer le déterminant de A.
d) On pose $B_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} A^k}{n}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} B_n$

Exercice 3 : Oral ccINP 2024

Soit a un réel strictement positif.

1) Montrer que : $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt$ est convergente.
2) Montrer l'existence et calculer $\int_0^1 t^{na} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$
3) On donne l'égalité $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}$
3)a) Peut-on montrer cette égalité à l'aide de la convergence uniforme ?
3)b) Peut-on montrer cette égalité grâce à la majoration du reste ?
3)c) Peut-on montrer cette égalité par le théorème d'intégration terme à terme ?
4) Que donne cette égalité pour $a = 1$?

Exercice 4 : Oral ccINP 2024

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire indépendantes et suivant toute une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

1) Déterminer la loi de S_n.

2) Calculer $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$

Soit N une variable aléatoire telle que $N+1$ suive une loi géométrique de paramètre p.

On considère une urne contenant une boule rouge et une boule verte indiscernable au toucher.
On effectue N tirages avec remise et on note X le nombre de boules vertes tirées.

3) Déterminer la loi de X.

Exercice 5 : Oral ccINP 2024

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$
Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et démontrer qu'elle converge vers 0.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$$
Justifier la convergence de la série $\sum v_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$
Étudier la convergence de la série $\sum w_n$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$
Étudier la convergence de la série $\sum x_n$.

Corrigé exercice 1 : Oral ccINP 2024

1) $\chi_A(X) = \begin{pmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ -1 & 0 & X \end{pmatrix} = X^3 - X^2 + X.$

Par le théorème de Hamilton-Cayley : $X^3 - X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A de degré 3.
Pour $n \geq 1$ on multiplie $A^3 - A^2 + A = 0$ par A^{n-1} et on a : $A^{n+2} - A^{n+1} + A^n = 0$ et par linéarité de la trace : $\boxed{u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0}$

$(u_n)_{n>0}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants d'équation caractéristique : $X^2 - X + 1 = 0$

$\Leftrightarrow X = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X = exp(i\frac{i\pi}{3})$ ou $X = exp(-\frac{i\pi}{3})$

D'après le cours, en remarquant que $\left|exp(i\frac{i\pi}{3})\right| = 1$, on a :

$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \forall n \geq 1 \ , \ u_n = acos(\frac{n\pi}{3}) + bsin(\frac{n\pi}{3})$

Comme $u_2 = tr(A^2) = -1$ et $u_1 = tr(A) = 1$ alors :

$$\begin{cases} u_2 = \frac{-1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = -1 \\ u_1 = \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + \sqrt{3}b = -2 \\ a + \sqrt{3}b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ u_n = 2cos(\frac{n\pi}{3})}$

2) D'après le polynôme caractéristique, A admet dans $\mathbb{C}$ trois valeurs propres distinctes, 0, $exp(i\frac{i\pi}{3})$ et $exp(-i\frac{i\pi}{3})$

On a donc $\boxed{A \text{ diagonalisable dans } M_3(\mathbb{C})}$ et A semblable à $diag(0, exp(\frac{i\pi}{3}), exp(\frac{-i\pi}{3}))$.

Donc A^n est semblable à $diag(0, exp(\frac{in\pi}{3}), exp(\frac{-in\pi}{3}))$ et donc

$u_n = 0 + exp(i\frac{in\pi}{3}) + exp(-in\frac{i\pi}{3}) = 2cos(\frac{n\pi}{3})$ On retrouve bien le résultat du 1).

3) u_n ne tend pas vers 0 (par exemple car $u_{6n} = 2$) donc $\boxed{\sum u_n \text{ est divergente.}}$ (grossièrement).

Corrigé exercice 2 : Oral ccINP 2024

a) Le polynôme caractéristique de A vaut :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$\chi_A(X) = XX^{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)(-1)^{n-1} = X^n - 1$

$\chi_A(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est une racine n-ième de l'unité. $A \in M_n(\mathbb{C})$ et admets n valeurs propres distinctes, donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{C}) \text{ et ses valeurs propres sont les racines n-ième de l'unité.}}$

b) • $A^n = I_n$ donc $(A^k)_{k\in\mathbb{N}} = (A^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$

• On pose $\omega = exp(\frac{2i\pi}{n})$. Ainsi avec le a), A est semblable à $D = diag(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$
On a donc $dim(Vect((A^k)_{k\in\mathbb{N}})) = dim(Vect((A^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]})) = dim(Vect((D^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}))$

• Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que : $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i D^i = 0$
Alors $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i diag(1, \omega^i, (\omega^2)^i, \dots, (\omega^{n-1})^i) = 0$
ce qui s'écrit $\underbrace{V(1, \omega_1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})}_{Vandermonde} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = (0)$
Comme les racines n-ième sont distinctes, la matrice de Vandermonde est inversible donc les a_i sont nuls.
On en déduit $Vect((D^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$ libre, et donc $\boxed{dim(Vect((A^k)_{k\in\mathbb{N}})) = n}$