Feuille d'exercices n°72 : Préparation aux oraux

Exercice 1 : Oral ccINP 2023

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $u_n = tr(A^n)$

1) En utilisant un polynôme annulateur de A de degré 3, donner une relation linéaire entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.
En déduire une expression de u_n en fonction de n.
2) Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$
Trouver une relation entre les valeurs propres de A et u_n.
3) Nature de $\sum u_n$

Exercice 2 : Oral ccINP 2023

Soit $n \geq 2$ et A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et donner ses valeurs propres.
b) Quel est la dimension de l'espace vectoriel engendrée par la famille $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
c) Calculer le déterminant de A.
d) On pose $B_N = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} A^k}{N}$. Déterminer $\lim_{N\to+\infty} B_N$

Exercice 3 : Oral ccINP 2023

Soit a un réel strictement positif.

1) Montrer que : $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt$ est convergente.
2) Montrer l'existence et calculer $\int_0^1 t^{na} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$
3) On donne l'égalité $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}$
3)a) Peut-on montrer cette égalité à l'aide de la convergence uniforme ?
3)b) Peut-on montrer cette égalité grâce à la majoration du reste ?
3)c) Peut-on montrer cette égalité par le théorème d'intégration terme à terme ?
4) Que donne cette égalité pour $a = 1$?

Exercice 4 : Oral ccINP 2023

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire indépendantes et suivant toute une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

1) Déterminer la loi de S_n.

2) Calculer $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$

Soit N une variable aléatoire telle que $N+1$ suive une loi géométrique de paramètre p.

On considère une urne contenant une boule rouge et une boule verte indiscernable au toucher.
On effectue N tirages avec remise et on note X le nombre de boules vertes tirées.

3) Déterminer la loi de X.

Exercice 5 : Oral ccINP 2023

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$
Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et démontrer qu'elle converge vers 0.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$$
Justifier la convergence de la série $\sum v_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$
Étudier la convergence de la série $\sum w_n$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$
Étudier la convergence de la série $\sum x_n$.

Corrigé exercice 1 : Oral ccINP 2024

1) $\chi_A(X) = \begin{pmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ -1 & 0 & X \end{pmatrix} = X^3 - X^2 + X.$

Par le théorème de Hamilton-Cayley : $X^3 - X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A de degré 3.
Pour $n \geq 1$ on multiplie $A^3 - A^2 + A = 0$ par A^{n-1} et on a : $A^{n+2} - A^{n+1} + A^n = 0$ et par linéarité de la trace : $\boxed{\forall n \geq 1 \ , \ u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0}$

$(u_n)_{n>0}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants d'équation caractéristique : $X^2 - X + 1 = 0$

$\Leftrightarrow X = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X = exp(i\frac{i\pi}{3})$ ou $X = exp(-\frac{i\pi}{3})$

D'après le cours, en remarquant que $\left|exp(i\frac{i\pi}{3})\right| = 1$, on a :

$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \forall n \geq 1 \ , \ u_n = acos(\frac{n\pi}{3}) + bsin(\frac{n\pi}{3})$

Comme $u_2 = tr(A^2) = -1$ et $u_1 = tr(A) = 1$ alors :

$$\begin{cases} u_2 = \frac{-1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = -1 \\ u_1 = \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + \sqrt{3}b = -2 \\ a + \sqrt{3}b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ u_n = 2cos(\frac{n\pi}{3})}$

2) D'après le polynôme caractéristique, A admet dans $\mathbb{C}$ trois valeurs propres distinctes, 0, $exp(i\frac{i\pi}{3})$ et $exp(-i\frac{i\pi}{3})$

On a donc $\boxed{A \text{ diagonalisable dans } M_3(\mathbb{C})}$ et A semblable à $diag(0, exp(\frac{i\pi}{3}), exp(\frac{-i\pi}{3}))$.

Donc A^n est semblable à $diag(0, exp(\frac{in\pi}{3}), exp(\frac{-in\pi}{3}))$ et donc

$u_n = 0 + exp(i\frac{in\pi}{3}) + exp(-in\frac{i\pi}{3}) = 2cos(\frac{n\pi}{3})$ On retrouve bien le résultat du 1).

3) u_n ne tend pas vers 0 (par exemple car $u_{6n} = 2$) donc $\boxed{\sum u_n \text{ est divergente.}}$ (grossièrement).

Corrigé exercice 2 : Oral ccINP 2024

a) Le polynôme caractéristique de A vaut :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$\chi_A(X) = XX^{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)(-1)^{n-1} = X^n - 1$

$\chi_A(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est une racine n-ième de l'unité. $A \in M_n(\mathbb{C})$ et admets n valeurs propres distinctes, donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{C}) \text{ et ses valeurs propres sont les racines n-ième de l'unité.}}$

b) • $A^n = I_n$ donc $(A^k)_{k\in\mathbb{N}} = (A^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$

• On pose $\omega = exp(\frac{2i\pi}{n})$. Ainsi avec le a), A est semblable à $D = diag(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$
On a donc $dim(Vect((A^k)_{k\in\mathbb{N}})) = dim(Vect((A^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]})) = dim(Vect((D^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}))$

• Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que : $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i D^i = 0$
Alors $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i diag(1, \omega^i, (\omega^2)^i, \dots, (\omega^{n-1})^i) = 0$

ce qui s'écrit $\underbrace{V(1, \omega_1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})}_{Vandermonde} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = (0)$

Comme les racines n-ième sont distinctes, la matrice de Vandermonde est inversible donc les a_i sont nuls.
On en déduit $Vect((D^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$ libre, et donc $\boxed{dim(Vect((A^k)_{k\in\mathbb{N}})) = n}$

c) $\chi_A(0) = det(-A) = (-1)^n det(A)$ et $\chi_A(0) = -1$ donc $\boxed{det(A) = (-1)^{n+1}}$

d) • En calculant A^2, A^3, ... on remarque que $A_k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$:

Remarque : ces calculs des puissances de A pouvaient permettre de résoudre le b) car on obtient une famille clairement libre.

On remarque alors que : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} A^k = U$ avec U la matrice ne contenant que des 1.

• On a déjà vu que $A = PDP^{-1}$ avec $D = diag(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$
Soit $p \in \mathbb{N}$, calculons : $C_{pn} = \sum\limits_{k=0}^{pn-1} D^k = diag(\sum\limits_{k=0}^{pn-1} 1, \sum\limits_{k=0}^{pn-1} \omega^k, (\sum\limits_{k=0}^{pn-1} \omega^2)^k, \dots, \sum\limits_{k=0}^{pn-1} (\omega^{n-1})^k)$
Mais $\sum\limits_{k=0}^{pn-1} w^k = \frac{1-w^{pn}}{1-w} = \frac{1-(w^n)^p}{1-w} = 0$ si w est une racine n-ième de l'unité différente de 1.
Donc $\sum\limits_{k=0}^{pn-1} D^k = diag(pn, 0, \dots, 0)$ et donc $C_{np} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{pn-1} A^k}{pn} = Pdiag(1, 0, \dots, 0)P^{-1} = \frac{1}{n}U$ par le point précédent.

Soit $N \in \mathbb{N}$, alors $C_N = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n\lfloor\frac{N}{n}\rfloor-1} A^k + \sum\limits_{n\lfloor\frac{N}{n}\rfloor}^{N-1} A^k}{N}$ qui s'écrit $C_N = \underbrace{\frac{n\lfloor\frac{N}{n}\rfloor}{N}}_{\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underbrace{\frac{\sum\limits_{k=0}^{n\lfloor\frac{N}{n}\rfloor-1} A^k}{n\lfloor\frac{N}{n}\rfloor}}_{\frac{1}{n}U} + \frac{\overbrace{\sum\limits_{n\lfloor\frac{N}{n}\rfloor}^{N-1} A^k}^{\text{bornée car somme finie}}}{N}$

On a finalement : $\boxed{\lim\limits_{N\to+\infty} C_n = \frac{1}{n}U}$

Remarque : c'est la matrice de la projection orthogonale sur $vect((1, \dots, 1))$

Corrigé exercice 3 : Oral ccINP 2024

1) $t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc $\boxed{\text{l'intégrale } \int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt \text{ est convergente.}}$

2) De même $t \mapsto t^{na}$ est continue sur $[0,1]$ donc $\int\limits_0^1 t^{na} dt$ est convergente.

De plus $\int\limits_0^1 t^{na} dt = [\frac{t^{na+1}}{na+1}]_0^1 = \frac{1}{1+na}$ On a donc : $\boxed{\int\limits_0^1 t^{na} dt = \frac{1}{1+na}}$

3) a) $\forall t \in [0,1[\ , \ \frac{1}{1+t^a} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-t^a)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{na}$ car $t^a \in [0,1[$

$\sum\limits_{n=0}^{N} (-t^a)^n = \frac{1-(-t^a)^{(N+1)}}{1+t^a}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+t^a} - \sum\limits_{n=0}^{N} (-t^a)^n = \frac{(-t^a)^{(N+1)}}{1+t^a} = (-1)^{N+1} \frac{t^{a(N+1)}}{1+t^a} = R_N(t)$

Etudions $\begin{array}{cccc} A & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \frac{u^{N+1}}{1+u} \end{array}$

A est dérivable et $A'(u) = \frac{(N+1)u^N(1+u) - u^{N+1}}{(1+u)^2} = \frac{u^N((N+1)+Nu^N)}{(1+u)^2} \geq 0$

On en déduit $||R_N||_\infty = A(1) = \frac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0 et donc il n'y a pas convergence uniforme de la série de fonctions.

On ne peut pas démontrer l'égalité voulue avec la convergence uniforme.

3) b) $|R_n(t)| = \left|(-1)^{N+1} \frac{t^{a(N+1)}}{1+t^a}\right| \leq \frac{t^{a(N+1)}}{1+t^a} \leq t^{a(N+1)}$

On va utiliser cette majoration du reste. Comme $\frac{1}{1+t^a} = \sum\limits_{n=0}^{N} (-)^n t^{na} + R_N(t)$ on a :

$\left|\int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt - \int\limits_0^1 \sum\limits_{n=0}^{N} (-)^n t^{na} dt\right| \leq \int\limits_0^1 |R_N(t)|\, dt$

$\Rightarrow \left|\int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt - \sum\limits_{n=0}^{N} \int\limits_0^1 (-)^n t^{na} dt\right| \leq \int\limits_0^1 t^{a(N+1)} dt$

$\Rightarrow \left|\int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt - \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{1+na}\right| \leq \frac{1}{1+a(N+1)} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

La majoration du reste permet d'obtenir l'égalité voulue.

3) c) $\sum \int\limits_0^1 t^{na} dt = \sum \frac{1}{1+na}$ qui est divergente.

Donc on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

4) Pour $a = 1$, on a alors : $\boxed{ln(2) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}}$

Corrigé exercice 4 : Oral ccINP 2024

1) C'est du cours, S_n suit une loi binomiale de paramètre (n, p).

2) D'après le cours : $\forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$

C'est une série entière, on peut dériver autant de fois que l'on veut, terme à terme, sur l'intervalle ouvert de convergence. On a, en dérivant k fois :

$\forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{d^k}{dx^k}[\frac{1}{1-x}] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^n$

$\Rightarrow \forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^n \Rightarrow \forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^n$

On a donc : $\boxed{\forall x \in]-1,1[\ ,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}}$

3) On a, par définition d'une loi géométrique : $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \mathbb{P}(N = k) = (1-p)^k p$

On remarque que : $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(N = k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a donc $\forall k \in \mathbb{N}$

$\mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \cap N = n)$

$= \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k|\ N = n)\mathbb{P}(N = n)$

On a que $\mathbb{P}(X = k|\ N = n) = 0$ si $n < k$ (on ne peut pas tirer k boules vertes si on fait moins de k tirages)

On remarque que $X|_{N=n}$ soit une loi binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{2})$ (c'est la question 1), donc :

$\mathbb{P}(X = k)$

$= \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} [(\frac{1}{2})^k (1 - \frac{1}{2})^{n-k}](1-p)^n p$

$= \sum\limits_{n=k}^{+\infty} p\binom{n}{k} \frac{1}{2^n} (1-p)^n$

$= p\frac{(1-p)^k}{2^k} \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\frac{1-p}{2})^{n-k}$

On utilise alors le 2) :

$\mathbb{P}(X = k)$

$= p\frac{(1-p)^k}{2^k} \frac{1}{(1-\frac{1-p}{2}))^{k+1}}$

$= p\frac{(1-p)^k}{2^k} \frac{2^{k+1}}{(1+p)^{k+1}}$

$= \frac{2p}{1+p} \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k$

$\boxed{\text{La loi de probabilité de } X \text{ est donc donnée par : } X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{2p}{1+p} \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k}$

Remarque : $X + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2p}{1+p}$

Corrigé exercice 5 : Oral ccINP 2024

1) $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ est une série alternée, convergente car $(\frac{1}{\sqrt{k}})$ est décroissante de limité nulle.
(u_n) est la suite des restes, donc $\boxed{(u_n) \text{ est convergente et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

2) Par le théorème spécial, $|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et donc $|v_n| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$
Comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente alors, par comparaison, $\sum v_n$ est absolument convergente donc convergente.

3) Posons $S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ alors :
$w_n = \frac{(-1)^n}{n}[S - u_n] = S\frac{(-1)^n}{n} - v_n$
Comme $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée convergente (car $(\frac{1}{n})$ est décroissante de limite nulle) et que $\sum v_n$ est convergente (par la 2) alors $\boxed{\sum w_n \text{ est convergente.}}$

4) Par le TSACSA, $\sum\limits_{k=1}^{+n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ est une série convergente de limite positive.
Donc $\exists C > 0$, $x_n \sim \frac{C}{n}$
Par Riemann, on a alors : $\boxed{\sum x_n \text{ divergente.}}$