ORAUX BLANCS PSI 2025 : Mr Danflous

Planche 1

Exercice 1

Soit $p \in]0,1[$. Trois clients $A_1,\ ,A_2$ et A_3 entrent dans un bureau de poste désert ayant exactement 2 guichets. Les clients A_1 et A_2 accèdent directement au guichet et A_3 doit attendre que A_1 ou A_2 ait fini d'être servi avant d'accéder au guichet. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associées aux temps de service de chacun des clients et on suppose que $\forall k \in \mathbb{N},\ ,\mathbb{P}(X_i = k) = (1-p)p^k$

On suppose que X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes.

On note Y la variable aléatoire associée à la première sortie du bureau de poste (i.e. le moment où A_3 accède au guichet) et Z le moment où A_3 sort du bureau de poste.

1) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité de l'événement $(Y \leq k)$, et en déduire la loi de Y.

2) Exprimer Z en fonction de Y et de X_3. En déduire la loi de Z.

3) Calculer le temps moyen entre l'entrée de A_3 et sa sortie du bureau de poste.

Exercice 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.

1) Déterminer une base $Ker(f)$.
2) f est-il surjectif ?
3) Déterminer une base de $Im(f)$.
4) A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = Ker(f) \oplus Im(f)$?

Planche 2

Exercice 1

On pose $f : x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt$

1) Déterminer l'intervalle de définition de f.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) Soit $x > 0$. Calculer $f(x-1) - f(x)$

4) En déduire une expression de f sous la forme d'une somme de série de fonctions.

5) Trouver une autre méthode pour obtenir ce résultat.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1) Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3) Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Planche 3

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto \frac{1}{cosh(t)^n}$.

1) Étudier la convergence de $\int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

2) Étudier le comportement asymptotique de la suite (a_n) et préciser la valeur de sa limite éventuelle.

3) Étudier la convergence de $\sum(-1)^n a_n$ puis de $\sum a_n$.

4) Étudier le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1) Démontrer que $E = Im(f) \oplus Ker(f) \Rightarrow Im(f) = Im(f^2)$

2) Démontrer que : $Im(f) = Im(f^2) \Leftrightarrow Ker(f) = Ker(f^2)$
Démontrer que $Im(f) = Im(f^2) \Rightarrow E = Im(f) \oplus Ker(f)$

Planche 4

Exercice 1

On considère l'équation $x''' - 5x'' + 7x' - 3x = 0$

1) Montrer que x est solution de cette équation si et seulement si $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$ est solution d'un système différentiel $X' = AX$ où A est une matrice à déterminer.

2) Déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire.

3) Résoudre l'équation.

Exercice 2

E et F désignent deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

On note $||\cdot||_E$ (respectivement $||\cdot||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1) Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
P1 : f est continue sur E
P2 : f est continue en 0_E
P3 : $\exists k > 0$, $\forall x \in E$, $||f(x)||_F \leq k\, ||x||_E$

2) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)dt$

Démontrer que φ est linéaire et continue.