ORAUX BLANCS PSI, Mr Charitat : série 1

MIROUH Akram

Exercice 1

Pour p et n entiers naturels, on définit $f_{n,p}(t) = t^n(ln(t))^p$

On pose $\phi(t) = t^t$ si $t \in]0,1]$ et $I = \int\limits_0^1 \phi(t)dt$

a) Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^n}$ est convergente.
b) Montrer que l'intégrale I est bien définie.
c) Montrer que $\int\limits_0^1 f_{n,p}(t)dt$ est bien définie et la calculer.
d) Montrer que $I = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$

Exercice 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $E = M_n(\mathbb{R})$. On pose $\forall M \in E$, $u(M) = aM + bM^T$
1) Montrez que u est un endomorphisme.
2) Montrez que u est diagonalisable et déterminez ses valeurs propres.
3) Calculez $tr(u)$ et $det(u)$.

SEMSAR Ayoub

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $(E) \Leftrightarrow (x^2 - 1)y''(x) + 2xy'(x) - y(x) = 0$
On pose $I =]-1, 1[$
1) Que dire de l'ensemble des solutions de (E) sur I ?
2) Déterminez les solutions polynomiales de (E).
3) Trouvez une équation différentielle (F) vérifiée par $z : x \mapsto \frac{y(x)}{x}$
4) Cherchez $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\frac{2-4x^2}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$
5) Résoudre (F)
6) Résoudre (E)

Exercice 2

Soient $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin(x))dx$ et $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ln(cos(x))dx$
1) Justifiez l'existence de I et J.
2) Montrez $I = J$.
3) Calculez $I + J$ et en déduire la valeur de I

CHARRETRON Théo

Exercice 1

On considère la série de fonction : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

a) Déterminer D le domaine de définition de f.
b) Pour $x \neq 0$, que dire de $f(\frac{1}{x})$?
c) Montrer que f est de classe C^1 sur D.
d) En considérant $(1-x)f(x)$ pour $x \in]-1, 0[$ déterminer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$
e) Soit $x \in]0, 1[$. On pose $\forall t \geq 0$, $g(t) = \frac{x^t}{1+x^{2t}}$
Montrer que g est décroissante et en déduire un encadrement de $f(x)$ avec une intégrale de g.
En déduire un équivalent de $f(x)$ en 1^-

Exercice 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$
On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ le spectre ordonné de S.
Si μ est une valeur propre réelle de A montrer que : $\lambda_1 \leq \mu \leq \lambda_n$

PEYRETAILLADE Laureana

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie ($n \geq 1$). Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme non nul de E.
On suppose que $u^3 + u^2 + u = 0_{L(E)}$ (avec $u \circ u = u^2$ et $u \circ u^2 = u^3$).
On note Id_E l'application identité de E.
a) Montrons que : $E = ker(u) \bigoplus Im(u)$.
b) Montrer que : $Im(u) = ker(u^2 + u + Id_E)$.
c) On suppose que u est non bijectif : déterminer le spectre réel de u.
d) On suppose que u est bijectif : déterminer le spectre réel de u.
e) On suppose que u est bijectif, calculer $det(u)$.

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi et admettant une variance.
On suppose que la variable $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$
1) Déterminez l'espérance et la variance de X.
2) Calculez la fonction génératrice de X.
3) En déduire la loi de X.

DELESALLE Ryan

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose $\forall (P,Q) \in E^2\ ,\ (P,Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$

1) Montrer que l'on a un produit scalaire sur E.
2) On pose $F = \{P \in E\ ,\ P(1) = 0\}$. Montrez que F est un sous espace vectoriel de E et donner sa dimension.
3) Calculez la distance $d(1, F)$ du polynôme constant égale à 1 au sous espace vectoriel F.

Exercice 2

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$. On suppose f non nulle. On note A sa matrice dans la base canonique et on suppose que $A + A^3$ est nulle.

1) Montrez que A n'est pas inversible.
2) Montrez que $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus ker(f^2 + Id_{\mathbb{R}^3})$
3 Montrez $Ker(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul.
4) Montrez que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

GRASSO Chloé

Exercice 1

Soit note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Vérifier que $< f, g >= \int\limits_0^1 f(t)g(t)t^2 dt$ est un produit scalaire sur E.

b) Vérifier l'existence et calculer $\int\limits_0^1 x^n ln(x)dx$

c) Calculer le projeté orthogonal de $x \mapsto xln(x)$ sur le sous espace Fdes fonctions affines de E. $(F = \{f \in E\ ,\ \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \forall t \in [0,1]\ ,\ f(t) = at + b\})$

d) Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int\limits_0^1 (at + b - tln(t))^2 t^2 dt$

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombre réels strictement positifs.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*\quad u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)}$

a) Montrer que $u_1 + u_2 = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$ et généraliser cette formule.

b) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

c) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ dans le cas $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

BOISSELEAU Tom

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $P_n = \prod_{k=0}^{n}(X-k)$

1) Montrer que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} ln(n)$
2) Montrer que P' admet une unique racine sur $]0,1[$ que l'on notera λ_n
3) Simplifier $\frac{P_n'}{P_n}$
4) Donner un équivalent de λ_n

Exercice bonus

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose : $\begin{array}{cccc} \Phi & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \longmapsto & tr(A)M + tr(M)A \end{array}$

L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ? Donnez le polynôme caractéristique et la trace de Φ.

MAURS Mathis

Exercice 1

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

a) Déterminer $rg(B)$ en fonction de $rg(A)$.
b) Déterminer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.
c) Quel lien existe-t-il entre $sp(B)$ et $sp(A)$?
d) Si A est inversible et admet n valeurs propres distinctes, montrer que B est diagonalisable.
e) Est-ce encore vraie si A est non inversible et diagonalisable ?

Exercice 2

a) Montrer que pour tout x dans un domaine D à préciser, on a $tan(2x) = \frac{2tan(x)}{1-tan^2(x)}$
b) Montrer que : $\frac{\pi}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{2}-1)^{2n+1}$