ORAUX BLANCS PSI, Mr Charitat : série 2

EDELINE Melissande

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :
$u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{a_n^2 + u_n^2})$
1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}a_n$
2) Montrer que $\sum a_n$ convergente $\Rightarrow (u_n)$ convergente.
3) Etudier la réciproque (on pourra étudier le cas $u_n = \frac{n}{n+1}$)

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ P(X = k) = \frac{c}{k(k+1)}$ avec c un réel.
1) Déterminer la valeur de c
2) David et Claude jouent à un jeu. Si X prend une valeur paire, Claude donne X euros à David. Si X prend une valeur impaire k, David donne X euros à Claude. Déterminez l'espérance de gain de David

BONFANTI Mattéo

Exercice 1

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^+$.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$ et $I = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}dt$
Montrer que I et $\sum u_n$ sont de même nature. Que dire en cas de convergence ?

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant vérifiant la relation : $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$
En utilisant ses racines, déterminer P.

TAYEH Charbel

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$
a) Calculer le polynôme caractéristique de A.
b) A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
c) Déterminer $(P, D) \in M_n(\mathbb{R}^2)$ vérifiant : P inversible et $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
On veut résoudre $X^2 = A$ d'inconnue $X \in M_3(\mathbb{R})$
Montrer que si X est solution alors A et X commutent.
d) Résoudre $X^2 = A$

Exercice 2

Soit A, B et C trois points distincts du plan d'affixes complexes a,b et c.
On pose $j = exp(i\frac{2\pi}{3})$
a) Calculer $1 + j + j^2$
b) Montrer que : ABC équilatéral $\Leftrightarrow [b - a = -j(c - a)$ ou $b - a = -j^2(c - a)]$
c) Déterminer un polynôme de degré 2 unitaire dont $b - a$ est racine.
d) Montrer que ABC équilatéral $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$
e) Montrer que ABC équilatéral $\Leftrightarrow \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0$
f) Montrer que ABC équilatéral $\Leftrightarrow j$ ou j^2 sont racines de $az^2 + bz + c = 0$

BARBET Robin

Exercice 1

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} ln(1 + e^{-nx})$
a) Donner le domaine de définition D de f.
b) f est-elle continue sur D ?
c) Donner la limite de f en $+\infty$
d) Donner f(D).

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et s est une symétrie vectorielle.
On pose pour $u \in L(E)$, $g(u) = \frac{1}{2}(u \circ s + s \circ u)$
a) Montrer que g est un endomorphisme de $L(E)$.
b) Calculer g^3 et en déduire un polynôme annulateur de g.
c) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

PETIT Juliette

Exercice 1

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

a) Montrer que $ker(f^2)$ et $ker(f - 2Id_{\mathbb{R}^3})$ sont en somme directe.

b) Trouver un vecteur de $ker(f^2)$ qui n'est pas dans $ker(f)$

c) Trouver une base B' dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) Montrer que si $g^2 = f$ alors $ker(f^2)$ est stable par g ; que peut-on en déduire ?

Exercice 2

Etudier la convergence de l'intégrale : $I = \int_{0}^{+\infty} sin(t^2)dt$

LIEGEOIS Swann

Exercice 1

On pose pour tout x réel et $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n(x) = (-1)^n \frac{exp(-nx)}{n}$

On considère la série de fonction $\sum u_n(x)$ et on note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

a) Donner le domaine de définition D de S.

b) S est-elle continue sur D ?

c) Montrer que S est C^1 sur l'intérieur de D et déterminer S.

d) Autre méthode ?

Exercice 2

Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ on pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$

a) Diagonaliser $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si A est diagonalisable, prouver que B l'est aussi et diagonaliser B.

GAULTIER Arthur

Exercice 1

On pose $a = ln(1+\sqrt{2})$. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^a (sh(t))^n dt$

a) Résoudre l'équation $sh(t) = 1$

b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $ch^2(t) - sh^2(t) = 1$

d) Etablir la relation de récurrence : $\forall n \geq 2$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$

e) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

f) Quelle est la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n$?

g) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n$ est convergente et que sa somme vaut $\int_0^1 \frac{1}{1+sh(t)}dt$

Exercice 2

Soit $n \geq 2$ et $X \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $XX^TX = I_n$ Déterminer X

DESAPHY Nino

Exercice 1

On pose $I =]0, +\infty[$ et $\forall x \in I$, $f(x) = \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$

1) Montrer que f est C^∞ sur I et calculer la dérivée de f.

2) Déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

3) Déterminer un équivalent de f au voisinage de 0^+.

4) Montrer que $J = \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

5) Calculer J.

Exercice 2

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$

A quelle condition A est-elle diagonalisable ?