Planche 1.

Mathématiques.

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice.

On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonne.
On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi(A, A') = tr(A^T A')$ où $tr(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^T (transposée de A) par la matrice A'.
On note $\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,,\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et donner une base de $\mathscr{F}$.

3. On se place dans l'espace préhilbertien $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire φ.

   (a) Rappeler la définition de $\mathscr{F}^\perp$, l'orthogonal du sous-espace vectoriel $\mathscr{F}$.
   Déterminer alors une base de $\mathscr{F}^\perp$.

   (b) Déterminer la projection orthogonale de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^\perp$.

   (c) Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

Planche 1. Exercice(s) sans préparation.

1. Soit h la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} \frac{x - \arctan(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
   Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(E) \;\; xy' + 2y \; = \; \frac{x}{x^2+1}$$

3. Montrer que (E) possède une unique solution f définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

Planche 2.

Mathématiques.

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice.

1. (a) Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$ converge.

   (b) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est-elle développable en série entière ?

2. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ et calculer cette somme.

3. On propose à un joueur le jeu suivant :
   Il soit d'abord lancer une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention d'un premier pile.
   S'il lui a fallu n lancers pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.

   (a) Quelle est la probabilité que le joueur n'obtienne jamais pile ?

   (b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne à ce jeu ?

   (c) Sachant que le joueur a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu son premier pile au troisième lancer ?

Planche 2. Exercice(s) sans préparation.

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que 2 soit valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix}$

2. Démontrer que dans ce cas, la matrice A est diagonalisable.

3. Résoudre alors le système différentiel $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -x + y + z \\ z' = 3z \end{cases}$ dans lequel x, y, z désignent trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.

Planche 3.

Mathématiques.

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice.

1. (a) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.

   (b) Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ et préciser son domaine de validité.

2. On s'intéresse à la série entière définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)!} x^{2n}$

   (a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

   (b) Calculer la somme de cette série entière.

3. On s'intéresse à l'équation différentielle:

$$(E) \quad xy''(x) + 2y'(x) + 4xy(x) = 0$$

   (a) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0

   (b) Est-ce que toutes les solutions de (E) sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière ?

Planche 3. Exercice(s) sans préparation.

Soit $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ et $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & -\sqrt{2} & d \\ \sqrt{2} & b & e \\ 1 & \sqrt{2} & f \end{pmatrix}$

1. (a) Donner la définition d'une matrice orthogonale.

   (b) Donner la définition d'une isométrie vectorielle d'un espace euclidien.

2. Déterminer les éléments $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tels que $M \in SO_3(\mathbb{R})$.

3. On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
   Reconnaître l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ admettant, dans la base canonique, la matrice M déterminée à la question précédente.

Planche 4.

Mathématiques.

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer alors les éléments propres de la matrice A.

3. On dispose de deux boites A et B. Au départ, A contient deux jetons marqués 0 et B deux jetons marqués 1 . On extrait au hasard et simultanément un jeton de A et un jeton de B et on les change de boites. On effectue cette manipulation n fois.

   Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des points des jetons contenus dans A à l'issue de ces n manipulations.

   (a) Déterminer les valeurs possibles et la loi de X_1.

   (b) Pour tout $i \in \{0;1;2\}$ et pour tout $j \in \{0;1;2\}$, calculer les 9 résultats $P_{(X_{n-1}=j)}(X_n = i)$. On pourra écrire les 9 résultats dans un tableau à double entrée.

   (c) Soit C_n la matrice colonne donnant la loi de X_n, c'est-à-dire $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.
   Montrer que $C_n = AC_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

   (d) Comment déterminer la loi de X_n en fonction de n ?
   Qu'obtient-on lorsque $n \to +\infty$? Interpréter.

Planche 4. Exercice(s) sans préparation.

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = 6x^2 - y^2 - x^3$$

   (a) Montrer que la fonction f admet deux points critiques.

   (b) La fonction f admet-elle un extremum local ?

   (c) La fonction f admet-elle un extremum global ?

2. Dans $\mathbb{R}^3$, on s'intéresse à la surface (S) d'équation

$$(S) \;\; 6x^2 - y^2 - x^3 - z = 0$$

   (a) Montrer que le point $A(4, 0, 32)$ appartient à la surface (S)

   (b) Montrer que tous les points de (S) sont réguliers.

   (c) Donner une équation cartésienne du plan tangent à (S) en un point régulier de (S).