Planche 1 :

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$$

On suppose que u_0 est tel que $\sin(u_0) > 0$.

1) Montrer que pour tout $x > 0,\ \sin(x) < x$.

2) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3) En étudiant la série de terme général $u_n - u_{n+1}$ montrer que la série de terme général u_n^3 est convergente.

4) Montrer que les séries de termes généraux : $\ln\left(\dfrac{\sin(u_n)}{u_n}\right)$ et u_n^2 sont divergentes.

5) Déterminer le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.

Exercice 2

Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\mathrm{tr}(M) = 0 \quad \text{et} \quad M^3 - 4M^2 + 4M = O_n$$

Planche 2 :

Exercice 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x$$

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

2) On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x$.

a. Montrer que I converge.

b. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{x} \mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n = I$.

c. On introduit $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} \mathrm{d}x$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \big(J_n - K_n\big) = 0$$

d. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$.

e. En déduire la valeur de I.

Exercice 2

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $M^2 = 0$ **2)** $\mathrm{rg}(M) \leqslant 1$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$

Planche 3 :

Exercice 1

Une urne contient une proportion $p \in]0,1[$ de boules blanches (B) et le reste de boules noires (N).

On effectue des tirages successifs avec remise et on note X_1, X_2 les longueurs des deux premières suites monocolores.

Exemples :
→ si les premières boules successives tirées sont NNNBBN alors $X_1 = 3$ et $X_2 = 2$.

→ si les premières boules successives tirées sont NBN alors $X_1 = 1$ et $X_2 = 1$.

1) **Question préliminaire** : soit q un réel tel que $|q| < 1$. Montrer que $\sum_n nq^{n-1}$ et $\sum_n n(-1)q^{n-2}$ convergent et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

2) Donner la loi de X_1 et son espérance.

3) Donner la loi du couple (X_1, X_2).

4) En déduire la loi de X_2, son espérance et sa variance.

5) Pour quel(s) valeur de p la variance de L_2 est-elle minimale ?

Exercice 2

Soit $E = \mathscr{C}^2\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. On définit pour $f, g \in E$,

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \big(f(x)g(x) + f'(x)g'(x)\big)\mathrm{d}x$$

1) Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2) On pose $V = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E,\ f = f''\}$.

Montrer que V et W sont deux sous-espaces orthogonaux, et qu'ils sont supplémentaires dans E.

Planche 4 :

Exercice 1

Soient une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$f(M) = M - 2\mathrm{tr}(M)A$$

ou $\mathrm{tr}(M)$ désigne la trace de M.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que f est un automorphisme si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq \dfrac{1}{2}$.

3) Dans cette question on suppose que $\mathrm{tr}(A) = \dfrac{1}{2}$ et on note $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

- ***a.*** Montrer que H et $\mathrm{Vect}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- ***b.*** Montrer que f est le projecteur de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur H parallèlement à $\mathrm{Vect}(A)$.

4) Dans cette question on ne fait aucune hypothèse sur $\mathrm{tr}(A)$.

- ***a.*** Calculer f^2 et en déduire un polynôme annulateur de f.
- ***b.*** Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f soit diagonalisable.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On définit la matrice aléatoire

$$A : \omega \in \Omega \mapsto \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) - 1 \\ Y(\omega) - 1 & X(\omega) \end{pmatrix}$$

Déterminer la probabilité que A soit inversible.

Planche 5 :

Exercice 1

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante:

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, on réalise alors une seconde série de N tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

1) Déterminer la loi de la variable N. Donner son espérance.

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{N=n}(X = k)$.

3) ***a.*** Vérifier que $\mathbf{P}(X = 0) = \dfrac{4}{9}$

b. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$: $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

c. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{25}{36} \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

4) Montrer que X admet une espérance $\mathbf{E}(X)$, puis la calculer.

Exercice 2

Soient a et b deux réels non nuls, et n un entier tel que $n \geqslant 2$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit :

$$u : M \mapsto aM + bM^\top$$

où $M^\top$ est la transposée de M.

1) Montrer que $u \in \mathscr{L}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

2) Trouver un polynôme annulateur de u de degré 2.

3) En déduire que u est diagonalisable, et déterminer ses éléments propres.

4) Déterminer $\mathrm{tr}(u)$ et $\det(u)$.

Planche 6 :

Exercice 1

Pour $x > 0$, on pose
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

1) Justifier que S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Donner le sens de variation de S.

3) Montrer que :
$$\forall x > 0, \quad S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$$

4) En déduire un équivalent de S en 0.

5) Montrer que $S(x) \sim \dfrac{1}{2x}$ quand x tend vers $+\infty$.

6) Montrer que : $S(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

Exercice 2

On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ munit de
$$\varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$$
où $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_i X^i$. On note $H = \{P \in E \ | \ P(1) = 0\}$.

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2) Déterminer $H^\perp$ et calculer le distance de X à H.
