ORAUX BLANCS PSI, Mr Charitat : Série 3

ROYER Cyprien

Exercice 1

Un élément chimique émet des électrons pendant une durée T : on note N la variable qui dénombre le nombre d'électrons émis.
Un électron a une probabilité p d'être efficace, indépendamment des autres.
On note X la variable aléatoire qui dénombre les électrons efficaces et Y celle qui dénombre ceux qui ne le sont pas.
On remarque que $N = X + Y$ et on suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$
a) Pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, exprimer $P_{N=j}(X = k)$.
b) En déduire la loi marginale de X puis donner $E(X)$ et $V(X)$ sans calcul.
c) X et Y sont-elle indépendante ?
d) Calculer $cov(X, N)$ et en commenter le signe.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ Résoudre $B^2 = A$ d'inconnue $B \in M_3(\mathbb{R})$

POURTOY Camille

Exercice 1

On considère la série entière $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+3}}{(3n+3)!}$
a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
b) Calculer $f(x) + f'(x) + f''(x)$ sur $]-R; R[$
c) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$
(On cherchera les solutions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$)
d) Calculer $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$

Exercice 2

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $sp(A) \cap sp(B) = \emptyset$

1) Montrez que si P est un polynôme annulateur de A alors les valeurs propres de A sont racines de P.

2) Montrez que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible. (avec χ_A le polynôme caractéristique de A.)

3) Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$ Prouvez $AX = XB \Leftrightarrow X = 0$

4) Montrez que : $\forall M \in M_n(\mathbb{C})$, $\exists! X \in M_n(\mathbb{C})$, $AX - XB = M$

PIGNOL Jeanne

Exercice 1

On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$ et $\forall n \geq 2$, $(n+1)a_{n+1} = na_n + \frac{a_{n-2}}{2}$

On considère la série entière réelle : $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on note R son rayon de convergence.

1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq a_n \leq 1$
1) b) Montrer que la suite (na_n) est croissante (à partir d'un certain rang).
1) c) Déterminer R.

2) Montrer que S est solution sur $]-R; R[$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on notera (E).

3) Résoudre (E).

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer, suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ si la matrice A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

PRUGNAUD Valentin

Exercice

On pose : $\begin{array}{cccc} \Phi & : & (M_3(\mathbb{R}))^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (A, B) & \longmapsto & tr(A^T B) \end{array}$

a) Montrer que Φ est un produit scalaire.
Montrer que $S_3(\mathbb{R})$ et $A_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
Donner l'expression de $S(M)$ symétrie orthogonale de M par rapport à $S_3(\mathbb{R})$.
b) Soit A une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$. Soit S_A sa projection othogonale sur $S_3(\mathbb{R})$ et $Sp(S_A)$ son spectre. Montrer que : $1 \in Sp(S_A)$ et que $Sp(S_A) \subset [-1, 1]$

Exercice bonus

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$ simplement scindé.
Montrez que P' est simplement scindé.
2) Le polynôme $P = 8X^8 + 7X^7 + 4X^4 + +3X^3 + 2019X^2 + 2018X + 666$ est-il simplement scindé sur $\mathbb{R}$?

PICAUD Nicolas

Soit n un entier tel que $n \geq 2$.
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pose : $\forall P \in E \ \ \phi(P) = P'$
a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
b) Est-ce que ϕ est diagonalisable ?
c) Trouver une base B de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que la matrice de ϕ relativement à B soir de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Montrer que $I_{n+1} - A$ est inversible et calculer son inverse à l'aide des puissances de A.
e) Résoudre, dans $\mathbb{R}_n[X]$, l'équation d'inconnue P : $P - P' = X^2$

Exercice 2
On s'intéresse à la suite définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = sin(u_n)$
1) Etablir la convergence de cette suite et déterminer sa limite.
2) En considérant $u_{n+1} - u_n$ montrer que $\sum u_n^3$ est convergente.
3) En considérant $ln(u_{n+1}) - ln(u_n)$ montrer que la série $\sum u_n^2$ est divergente.

NICOLLE Audric

Exercice 1
On pose pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ $I(n, k) = \int\limits_0^{+\infty} t^k exp(-nt)dt$

a) Montrer que $I(n, k)$ est convergente et calculer $I(n, k)$.
b) Déterminer le rayon de convergence R de $S(x) = \sum\limits_{n=1} \frac{n!}{n^{n+1}} x^n$
c) Montrer que $\forall x \in] - R; R[\ \sum\limits_{n=1} \frac{n!}{n^{n+1}} x^n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dx$

Exercice 2
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 - 4M^2 + 4M = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ et $tr(M) = 0$

Déterminer les valeurs propres possibles de M et en déduire les matrices M répondant au problème.

FOURCADE Antoine

Exercice 1

Pour $x > 0$, et $n \geq 2$ on pose : $u_n(x) = \frac{ln(x)}{x^n ln(n)}$ et on note $S(x) = \sum\limits_{k \geq 2} u_k(x)$

a) Donner D le domaine de convergence simple de S.

b) Montrer que S ne converge pas normalement sur D

c) Montrer que pour $x \in D$ et $n \geq 2$, $\left| \sum\limits_{k \geq n+1} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{ln(n+1)}$

d) Montrer que S est continue sur D.

e) S est-elle intégrable sur D ?

Exercice 2

Soit f un endomorphisme de E euclidien tel que : $\forall x, y \in E \quad < x, y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0$
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, que dire de $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$?
Calculer $< f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) >$ et en déduire l'existence de $\alpha > 0$ tel que $||f(e_i)|| = \alpha$
Exprimer f comme composée de deux applications remarquables.

MOUBARIK Mohamed

Exercice 1

Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geq 2$) dont les coefficients vérifie $a_{i,1} = a_{1,i} = i$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ et dont les autres coefficients sont nuls.

a) Déterminer le rang de A et la dimension de $ker(A)$

b) La matrice A est-elle diagonalisable.

c) Montrer que A admet trois valeurs propres 0, λ et $1 - \lambda$

d) Trouver un polynôme annulateur de A de degré 3.

Exercice 2

On définit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(0,0) = 0$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \quad f(x, y) = \frac{yx^3 - xy^3}{x^2 + y^2}$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

c) Etudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. f est-elle C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

LEMARIE Guillaume

Exercice 1

1) Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$, soit g une fonction de X dans $\mathbb{R}$.
Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers g.

2) On pose $\forall x \geq 0 : f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} exp(-nx^2)$
a) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$?
c) Soit $a > 0$, la suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a; +\infty[$?
d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0; +\infty[$?

Exercice 2

Compléter $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & ? \\ -2 & 6 & ? \\ 3 & ? & ? \end{pmatrix}$ pour que A soit une matrice de rotation et préciser les caractéristiques de cette rotation.