Feuille d'exercices n°73 : Préparation aux oraux : rotation

Dans cet exercice, on se place dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On notera $B = (i, j, k)$ la base canonique de E.

I) Exemple

On considère la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de E admettant A comme matrice relativement à la base canonique de E.

On note ϕ la rotation d'axe orienté $\mathbb{R}i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

2°) Déterminer C la matrice de ϕ relativement à B.

II) Une propriété utile au III) (A faire uniquement si on a le temps)

Soit F une rotation de E.

3°) Montrer que F conserve le produit vectoriel.

III) Cas général

On considère désormais f une rotation d'axe orienté $\mathbb{R}u$ et d'angle α et g une rotation d'axe orienté $\mathbb{R}v$ et d'angle θ. On suppose que u et v sont unitaires.

On pose $h = f \circ g \circ f^{-1}$.

4°) Montrer que h est une rotation d'axe orienté par $f(v)$. On notera alors β l'angle de cette rotation et on ne cherche pas à déterminer β dans cette question.

5°) Soit y un vecteur orthogonal à $f(v)$.

5°) a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$

5°) b) Montrer que : $h(y) = cos(\beta)f(x) + sin(\beta)f(v) \wedge f(x)$

5°) c) Montrer que : $h(y) = cos(\theta)f(x) + sin(\theta)f(v) \wedge f(x)$

5°) d) Que dire de θ et de β ?

6°) Utiliser les résultats précédents pour déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\phi \circ \varphi \circ \phi^{-1}$

1°) Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A alors :
$||C_1|| = \frac{1}{9}(2^2+1^2+2^2) = 1$, $||C_2|| = \frac{1}{9}(2^2+2^2+1^2) = 1$, $||C_3|| = \frac{1}{9}(1^2+2^2+2^2) = 1$
$C_1.C_2 = \frac{1}{9}(4-2-2) = 0$ et de même $C_1.C_3 = C_2.C_3 = 0$
On en déduit que les colonnes de A forment une base orthonormée et donc que A est une matrice orthogonale.

On cherche les éléments invariants. On résout donc :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+2y-z=0\\-x-y+2z=0\\2x-y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=z\\x=z\\0=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z$$

Posons $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Alors $dim(ker(\varphi - Id_E)) = 1$ et donc φ est une rotation d'axe orienté $\mathbb{R}u$ et d'angle θ.

Soit $x = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ alors $x \perp u$ et donc d'après le cours : $\varphi(x) = cos(\theta)x + sin(\theta)\frac{u}{||u||} \wedge x$
Matricielement :

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = cos(\theta)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + sin(\theta)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix} = cos(\theta)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + sin(\theta)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}sin(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2}\\cos(\theta) = \frac{1}{2}\end{cases}$$ On en déduit que $\theta = -\frac{\pi}{3}$

Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est la rotation d'axe orienté } \mathbb{R}u \text{ et d'angle } \theta \text{ avec } u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } \theta = \frac{-\pi}{3}}$

2°) L'axe de la rotation étant $\mathbb{R}i$ la base $B = (i,j,k)$ est adaptée à ϕ et donc

$$C = M_B(\phi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & cos(\frac{\pi}{2}) & -sin(\frac{\pi}{2})\\0 & sin(\frac{\pi}{2}) & cos(\frac{\pi}{2})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$ On a donc $\boxed{C = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}}$

3°) Soit $(u,v) \in E^2$. Montrons que $F(u \wedge v) = F(u) \wedge F(v)$
Soit $w \in E$, alors comme F est bijective ($det(F) = 1 \neq 0$), il existe $x \in E$ tel que $w = F(x)$
Alors $(F(u) \wedge F(v)).w$ on utilise $w = F(x)$
$= (F(u) \wedge F(v)).F(x)$ définition du produit mixte
$= Det(F(u), F(v), F(x))$ propriété du déterminant d'un endomorphisme
$= det(F)Det(u,v,x)$ $det(F) = 1$ car F est une rotation
$= Det(u,v,x)$ propriété du produit mixte
$= (u \wedge v).x$ F est une rotation donc une isométrie vectorielle et conserve donc le produit scalaire
$= F(u \wedge v).F(x)$
$= F(u \wedge v).w$

On a donc : $\forall w \in E \ \ (F(u) \wedge F(v)).w = (u \wedge v).w \Leftrightarrow (F(u) \wedge F(v) - u \wedge v).w$
En prenant $w = F(u) \wedge F(v) - u \wedge v$ on obtient $w.w = 0$ donc $w = 0_E$ et donc $F(u) \wedge F(v) = u \wedge v$
Ceci pour tout u et v, donc F conserve le produit vectoriel.

Bilan : $\boxed{\text{Dans } \mathbb{R}^3\text{, les rotations conservent le produit vectoriel.}}$

Remarque : question non posée ici, mais on a la réciproque.
Soit $f \in L(E)$ non nulle.
Supposons que f conserve le produit vectoriel et montrons que f est une rotation.
Posons $I = f(i)$, $J = f(j)$ et $K = f(k)$
Alors $f(i \wedge j) = f(i) \wedge f(j) \Rightarrow f(k) = I \wedge J \Rightarrow K = I \wedge J$ donc $K \perp I$ et $K \perp J$
De même $f(k \wedge i) = f(k) \wedge f(i) \Rightarrow J = K \wedge I$ donc $J \perp I$
(I, J, K) est donc une famille orthogonale.
De plus en passant aux normes, puisque $||a \wedge b|| = ||a|| \, ||b||$ si $a \perp b$:
$||K|| = ||I|| \, ||J||$ et $||J|| = ||I|| \, ||K||$ ce qui donne : $||K|| = ||I||^2 \, ||K||$
Par symétrie on obtient de même : $||J|| = ||K||^2 \, ||I||$ et $||J|| = ||K||^2 \, ||J||$
Comme f n'est pas nulle, un des $f(i)$, $f(j)$, $f(k)$ est non nulle, par exemple $f(K) \neq 0_E$ donc $||I|| = 1$, et donc $||K|| = 1$ et donc $||J|| = 1$

Finalement (I, J, K) est une base orthonormée directe. f conserve une base orthonormée directe donc f est une rotation.

On a donc pour $f \in L(E)$ non nulle : $\boxed{f \text{ est une rotation} \Leftrightarrow f \text{ conserve le produit vectoriel.}}$

4°) h est une isométrie vectorielle car c'est une composée d'isométries vectorielles.
De plus $det(H) = det(f)det(g)det(f)^{-1} = det(g) = 1$ et donc h est une rotation.

$h(f(v)) = f(g(f^{-1}(f(v)))) = f(g(v)) = f(v)$ car $g(v) = v$.
Donc $h(f(v)) = f(v)$ et donc $f(v)$ est un vecteur directeur de l'axe de h.

On a donc $\boxed{h \text{ est une rotation d'axe orienté } \mathbb{R}f(v)}$

Remarque $f(v)$ est unitaire car v l'est et que f conserve la norme.

5°) a) f est une isométrie, donc f est inversible, donc $y = f(x)$ avec $x = f^{-1}(y)$

5°) b) $y \perp f(v)$ axe de h, donc, d'après le cours : $h(y) = cos(\beta)y + sin(\beta)f(v) \wedge y$
$\Leftrightarrow \boxed{h(y) = cos(\beta)f(x) + sin(\beta)f(v) \wedge f(x)}$

5°) c) $h(y) = h(f(x)) = f(g(f^{-1}(f(x)))) = f(g(x))$
Comme on sait que $< y, f(v) >= 0$ alors $< f(x), f(v) >= 0$ et comme f conserve le produit scalaire alors a $< x, v >= 0$
x est donc orthogonal à l'axe de g et on a par le cours : $g(x) = cos(\theta)x + sin(\theta)v \wedge x$
Donc $h(y) = f(g(x)) = f(cos(\theta)x + sin(\theta)v \wedge x)$ et comme f est linéaire :
$h(y) = cos(\theta)f(x) + sin(\theta)f(v \wedge x)$ et comme f conserve le produit vectoriel (cf 3°) alors :
$\boxed{h(y) = cos(\theta)f(x) + sin(\theta)f(v) \wedge f(x)}$

5°) d) Avec le b) et le c), on a : $\forall y \in E$ tel que $y \perp f(v)$ (puisque $y = f(x)$) :

$$cos(\theta)y + sin(\theta)f(v) \wedge y = cos(\beta)y + sin(\beta)f(v) \wedge y$$
$$\Rightarrow (cos(\theta) - cos(\beta))y + (sin(\theta) - sin(\beta))f(v) \wedge y = 0_E$$

On peut choisir y pour que $(f(v) \wedge y, y)$ soit libre et on a alors $cos(\theta) = cos(\beta)$ et $sin(\theta) = sin(\beta)$ et donc $\boxed{\theta = \beta}$

6°) On applique ce qui précède avec $g = \varphi$ et $f = \phi$, on a donc $\theta = \frac{-\pi}{3}$, $v = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\phi(v) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\phi \circ \varphi \circ \phi^{-1} \text{ est donc la rotation d'axe orienté } \mathbb{R}\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et d'angle } \frac{-\pi}{3}}$