Sujet 1

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1

L'objectif de cet exercice est de déterminer les triangles dont le périmètre est 2 et dont l'aire est maximale. On rappelle la formule de Héron d'Alexandrie[1] $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle et $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ est son demi-périmètre.

a) Montrer qu'on peut exprimer A sous forme d'une fonction de a et de b. On écrira $A^2 = f(a,b)$. Pourquoi le problème se ramène-t-il à la maximisation de la fonction f ?

b) Représenter graphiquement l'ensemble de définition $\mathcal{T}$ de la fonction f. Pourquoi les réels a et b sont-ils nécessairement inférieurs ou égaux à 1 ?

c) Déterminer les points critiques de la fonction f sur $\mathcal{T}$.

d) Déterminer le maximum de la fonction f et conclure sur la question posée.

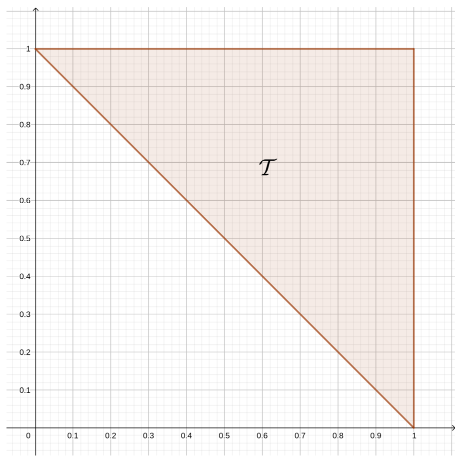
Corrigé :

a) Puisque $p = 1$ et $c = 2p - a - b = 2 - a - b$, on obtient

$$A = \sqrt{(1-a)(1-b)[1-(2-a-b)]} = \sqrt{(1-a)(1-b)(a+b-1)}.$$

Donc $f(a,b) = (1-a)(1-b)(a+b-1)$ Comme $A \geqslant 0$, A est maximale si et seulement si A^2 est maximale, il suffit donc de maximiser la fonction f sur un l'ensemble correspondant aux valeurs convenables de a et b.

b) Pour que la fonction f soit bien définie, il faut et il suffit que $a \leqslant 1$, $b \leqslant 1$ et $a + b \geqslant 1$. Cet ensemble peut être représenté graphiquement comme suit :



1. Ingénieur, mécanicien et mathématicien grec, sans doute du premier siècle après J.-C., auteur, outre cette formule, d'une méthode pour calculer les racines carrées et concepteur d'automates et de machines hydrauliques. La formule utilisée dans cet exercice semble avoir déjà été prouvée antérieurement par Archimède ($3^{\text{ième}}$ siècle avant J.C.).

Par inégalité triangulaire (au sens géométrique du terme !), on a $a \leqslant b + c$, donc $2a \leqslant a + b + c = 2$, et donc $a \leqslant 1$. De même $b \leqslant 1$.

c) On calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = -(1-b)(a+b-1) + (1-a)(1-b) = (1-b)(2-2a-b)$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = -(1-a)(a+b-1) + (1-a)(1-b) = (1-a)(2-a-2b)$$

Les points critiques sont donc :

- $a = b = 1$, donc $c = 0$. Il s'agit alors d'un triangle aplati, d'aire nulle.
- $2a + b = a + 2b = 2$, soit $a = b = \dfrac{2}{3}$, d'où $c = \dfrac{2}{3}$.

d) La fonction f admet un maximum et un minimum sur l'ensemble $\mathcal{T}$ qui est fermé et borné. Le minimum est certainement 0, il est atteint pour tout point de la frontière de $\mathcal{T}$ ($a = 1$, $b = 1$ ou $a + b = 1$ d'où $c = 1$). Le maximum est donc atteint à l'intérieur de $\mathcal{T}$, donc en un point critique. Il s'agit donc du cas où $a = b = c = \dfrac{2}{3}$. On a donc prouvé que le triangle équilatéral est celui qui maximise l'aire à périmètre donné.

Exercice 2

Un enfant a acheté un album à compléter avec N autocollants qu'il achète un par un chaque jour dans une pochette ne permettant pas de les identifier. On suppose qu'à un instant donné, il dispose de $k-1$ autocollants différents et on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de jours nécessaires pour obtenir un $k^{\text{ième}}$ autocollant nouveau différent de ceux qu'il a déjà. On note aussi X la variable aléatoire égale au nombre de jours nécessaire pour avoir la collection complète d'autocollants.

a) Déterminer la loi de Y_k (on pourra distinguer Y_1), son espérance et sa variance. Les variables (Y_k) sont-elles mutuellement indépendantes ?

b) Déterminer l'espérance de X, sa variance et en déterminer des équivalents.

Corrigé :

a) Il est clair que $Y_1 = 1$, donc $E(Y_1) = 1$ et $V(Y_1) = 0$.
Pour $k > 1$, à chaque achat, si on suppose que tous les autocollants sont mis en vente dans la même quantité, il y a une probabilité de $\dfrac{N-k+1}{N}$ que l'autocollant acheté ne fasse pas partie des autocollants acquis préalablement. On mesure avec Y_k le rang du premier succès, donc la loi de Y_k est $\mathcal{G}\left(\dfrac{N-k+1}{N}\right)$ si on suppose chaque achat indépendant. Par conséquent $E(Y_k) = \dfrac{N}{N-k+1}$ et $V(Y_k) = \dfrac{k-1}{N}\left(\dfrac{N}{N-k+1}\right)^2 = \dfrac{N(k-1)}{(N-k+1)^2}$ (ces formules demeurent valables pour $k = 1$).
Si on fait l'approximation selon laquelle les achats d'une personne ne modifient pas globalement la proportion de chaque autocollant mis sur le marché, on peut considérer que les variables aléatoires Y_k sont mutuellement indépendantes.

b) On a $X = Y_1 + \cdots + Y_N$, donc par linéarité de l'espérance, on a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{N} E(Y_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{N}{N-k+1} = N \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}$$

en faisant le changement d'indice $j = N - k + 1$. On reconnaît la somme partielle de la série harmonique, donc un équivalent quand $N \to +\infty$ est $N \ln N$.

Pour la variance, comme les variables aléatoires Y_k sont mutuellement indépendantes, on a

$$V(X) = \sum_{k=1}^{N} V(Y_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{N(k-1)}{(N-k+1)^2} = N \sum_{j=1}^{N} \frac{N-j}{j^2} = N^2 \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^2} - N \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}$$

toujours avec le changement d'indice $j = N - k + 1$. La première somme est la somme partielle d'une série convergente de somme $\dfrac{\pi^2}{6}$ et la seconde celle de la série harmonique équivalente à $\ln N$. C'est donc le premier terme qui est prépondérant, et un équivalent pour la variance est $\dfrac{\pi^2 N^2}{6}$.

Sujet 2

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = Q$, où Q est le polynôme défini par $Q(x) = \displaystyle\int_0^1 P(x+t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que φ conserve le degré. En déduire que c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Montrer que φ conserve le coefficient dominant. En déduire les valeurs propres possibles pour φ. S'agit-il d'un endomorphisme diagonalisable ?

Corrigé :

a) Par linéarité de l'intégrale, il est clair que l'application φ est linéaire. Calculons l'image du monôme X^k pour $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\int_0^1 (x+t)^k \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j t^{k-j} \right) \mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{k} x^j \binom{k}{j} \int_0^1 t^{k-j}\,\mathrm{d}t,$$

qui est une expression polynomiale de degré au plus k. Donc pour tout k, $\varphi(X^k) \in \mathbb{R}_k[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$, ce qui entraîne bien que φ est un endomorphisme de cet espace.

b) D'après le calcul précédent, $\varphi(X^k)$ a un coefficient dominant non nul, donc $\deg(\varphi(X^k)) = k$. Si P est un polynôme de degré k, il s'écrit $P = aX^k + Q$, où $a \neq 0$ et $\deg Q < k$. L'image de P sera la somme de celle de aX^k qui est de degré k et de celle de Q qui est de degré strictement inférieur à k. Finalement $\deg(\varphi(P)) = k = \deg P$.

On en déduit que tout polynôme non nul a une image non nulle, et donc que $\ker\varphi = \{0\}$. L'application φ est donc injective, et comme les dimensions des espaces de départ et d'arrivée (le même) sont égales, c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Le calcul de la première question montre que le coefficient dominant de $\varphi(X^k)$ est $\binom{k}{k} \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t = 1$. Dans un polynôme P de degré k, le seul contributeur au terme de degré k de $\varphi(P)$ est l'image du terme dominant. D'après la question précédente, on conclut que φ conserve le coefficient dominant.

Supposons maintenant $\varphi(P) = \lambda P$. Si a est le coefficient dominant de P, c'est aussi celui de $\varphi(P)$, mais celui de λP est λa. Finalement $\lambda a = a$, et donc $\lambda = 1$ puisque $a \neq 0$. La seule valeur propre possible est donc 1. Si φ est diagonalisable, il existe une base dans laquelle sa matrice est la matrice identité, autrement dit φ est l'application identité. Or si on prend le polynôme X, on vérifie par un calcul simple que $\varphi(X) = X + \dfrac{1}{2} \neq X$. Par conséquent l'endomorphisme φ n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n}}}}$.

a) Calculer $1+\sqrt{2}u_n$. En déduire l'inégalité $u_n^2 \leqslant 1+\sqrt{2}u_n$.

b) Quel est le comportement de la suite (u_n) lorsque $n \to +\infty$?

Corrigé :

a) Calculons $1+\sqrt{2}u_n$:

$$1+\sqrt{2}u_n = 1+\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n}}}} = 1+\sqrt{2+2\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$$

$$1+\sqrt{2}u_n = 1+\sqrt{1\times 2+\sqrt{2\times 2^2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n\times 2^{2^{n-1}}}}}}$$

en faisant entrer 2, puis 2^2, 2^4, $2^{2^{n-1}}$ successivement sous les racines.
On calcule par ailleurs u_n^2 :

$$u_n^2 = 1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n}}}.$$

Ici les nombres écrits sous les racines successives sont $2, 3, \ldots, n$, à comparer à $2, 2\times 2^2, \ldots, n\times 2^{2^{n-1}}$. On peut donc en déduire que $u_n^2 \leqslant 1+\sqrt{2}u_n$.

b) Pour passer de u_n à u_{n+1}, on remplace dans la dernière racine n par $n+\sqrt{n+1}$, par conséquent $u_n < u_{n+1}$, et donc la suite (u_n) est (strictement) croissante. Il y a donc deux possibilités pour son comportement :

- Soit elle est majorée et elle converge.
- Soit elle n'est pas majorée et elle tend vers $+\infty$.

Supposons qu'on soit dans ce dernier cas. On a donc d'après l'inégalité précédente $u_n^2 \leqslant 1+\sqrt{2}u_n$, donc en divisant par u_n : $u_n \leqslant \dfrac{1}{u_n}+\sqrt{2}$. Or le membre de gauche est borné alors que celui de droite tend vers $+\infty$, ce qui est impossible. On conclut donc que la suite (u_n) admet une limite finie.

Sujet 3

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

a) Déterminer la loi de la somme $S = X + Y$.

b) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $S = k$, où $k \in S(\Omega)$.

c) Calculer $P(S \geqslant n)$ pour $n \in S(\Omega)$.

d) Calculer $P(S \geqslant Z)$, $P(S \leqslant Z)$ et $P(S = Z)$.

Corrigé :

a) On connaît la fonction génératrice d'une variable suivant une loi géométrique : $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$, où $q = 1-p$, et de même pour Y et Z. Comme X et Y sont indépendantes, on a $G_S(t) = G_X(t)^2 = \dfrac{p^2t^2}{(1-qt)^2}$. Il s'agit de développer en série entière cette fonction :

$$G_S(t) = \frac{p^2t^2}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{1-qt}\right) = \frac{p^2t^2}{q}\sum_{n=1}^{+\infty} nq^nt^{n-1} = \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)p^2q^{k-2}t^k.$$

On en déduit $P(S=0) = P(S=1) = 0$, et pour $k \geqslant 2$: $P(S=k) = (k-1)p^2q^{k-2}$.

b) Comme X et Y sont strictement positives, il est clair que pour $n \geqslant k$, $P_{(S=k)}(X=n) = 0$. Pour $1 \leqslant n \leqslant k-1$,

$$P_{(S=k)}(X=n) = \frac{P(X=n, Y=k-n)}{P(S=k)} = \frac{q^{n-1}pq^{k-n-1}p}{(k-1)p^2q^{k-2}} = \frac{1}{k-1}.$$

Il s'agit donc d'une loi uniforme sur $[\![1, k-1]\!]$.

c) Pour $n \geqslant 2$:

$$P(S \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(S=k) = \sum_{k=n}^{+\infty}(k-1)p^2q^{k-2} = p^2q^{n-2}\sum_{j=0}^{+\infty}(n+j-1)q^j$$

$$P(S \geqslant n) = p^2q^{n-2}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}(j+1)q^j + (n-2)\sum_{j=0}^{+\infty}q^j\right) = p^2q^{n-2}\left(\frac{1}{(1-q)^2} + \frac{n-2}{1-q}\right) = q^{n-2}[1+(n-2)p]$$

et la formule demeure valable pour $n = 1$.

d) L'événement $(S \geqslant Z)$ est la réunion disjointe des événements $(S \geqslant n) \cap (Z = n)$ pour $n \geqslant 1$. Comme $S = X + Y$ et Z sont des variables aléatoires indépendantes, on obtient :

$$P(S \geqslant Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-2}[1 + (n-2)p]q^{n-1}p = \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty} q^{2n-2} + \frac{p^2}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}(n-2)q^{2n-2}$$

$$P(S \geqslant Z) = \left(\frac{p}{q} - \frac{2p^2}{q}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(q^2\right)^{n-1} + \frac{p^2}{q}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(q^2\right)^{n-1} = \frac{p(1-2p)}{q\left(1-q^2\right)} + \frac{p^2}{q\left(1-q^2\right)^2}$$

$$P(S \geqslant Z) = \frac{1-2p}{q(1+q)} + \frac{1}{q(1+q)^2} = \frac{(1-2p)(1+q)+1}{q(1+q)^2} = \frac{2+q-2p-2pq}{q(1+q)^2} = \frac{q+2q^2}{q(1+q)^2} = \frac{1+2q}{(1+q)^2}.$$

Le deuxième calcul est similaire : $P(S \leqslant Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((S \leqslant n) \cap (Z = n))$, or on peut calculer $P(S \leqslant n) = 1 - P(S \geqslant n+1) = 1 - q^{n-1}[1 + (n-1)p]$. Par conséquent :

$$P(S \leqslant Z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 - q^{n-1}[1 + (n-1)p]\right)q^{n-1}p = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}p - p\sum_{n=1}^{+\infty} q^{2n-2} - p^2\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)q^{2n-2}$$

$$P(S \leqslant Z) = 1 - \frac{p}{1-q^2} - \frac{p^2q^2}{(1-q^2)^2} = 1 - \frac{1}{1+q} - \frac{q^2}{(1+q)^2} = \frac{(1+q)^2 - (1+q) - q^2}{(1+q)^2} = \frac{q}{(1+q)^2}$$

Enfin :

$$P(S = Z) = \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)p^2q^{n-2}q^{n-1}p = p^3\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)q^{2n-3} = p^3q\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{2k-2} = \frac{p^3q}{(1-q^2)^2} = \frac{pq}{(1+q)^2}$$

Exercice 2

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' &=& 2x & & & + & z \\ y' &=& x & - & y & - & z \\ z' &=& -x & + & 2y & + & 2z \end{array}\right.$$

Corrigé : On cherche à réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique est

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -1 \\ -1 & X+1 & 1 \\ 1 & -2 & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -1 \\ -1 & X+1 & 1 \\ 0 & X-1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ -1 & X & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

en sommant les deux dernières lignes, puis en factorisant par $X-1$ et en retranchant la dernière colonne à la deuxième.

$$\chi_A(X) = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)[X(X-2)+1] = (X-1)^3.$$

La matrice A n'est pas diagonalisable, mais elle est trigonalisable. On détermine l'espace propre associé à la valeur propre 1 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & & + & c & = & 0 \\ a & - & 2b & - & c & = & 0 \\ -a & + & 2b & + & c & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système est de rang 2, donc l'espace propre est de dimension 1, engendré par le vecteur $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On cherche des vecteurs $E_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ tels que $AE_2 = E_1 + E_2$ et $AE_3 = E_2 + E_3$ (forme de Jordan). On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & & + & c & = & 1 \\ a & - & 2b & - & c & = & 1 \\ -a & + & 2b & + & c & = & -1 \end{array}\right. ,$$

d'où par exemple $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Puis on résout

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & & + & c & = & 1 \\ a & - & 2b & - & c & = & 0 \\ -a & + & 2b & + & c & = & 0 \end{array}\right. ,$$

dont une solution est $E_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

On définit donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et on a par construction $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si on pose $Y = P^{-1}X$, on obtient $Y' = TY$, soit en posant $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ le système triangulaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} u' & = & u & + & v & & \\ v' & = & & & v & + & w \\ w' & = & & & & & w \end{array}\right.$$

On résout en commençant par la dernière équation : $w'(t) = \alpha \mathrm{e}^t$, puis $v' - v = \alpha \mathrm{e}^t$, qui se résout en $v(t) = (\alpha t + \beta)\mathrm{e}^t$. Enfin, la première équation devient $u' - u = (\alpha t + \beta)\mathrm{e}^t$, qui se résout en $u(t) = \left(\frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t + \gamma\right)\mathrm{e}^t$, où α, β et γ sont des constantes réelles. On revient pour terminer aux fonctions inconnues initiales par le calcul $X = PY$, qui donne

$$x(t) = \left(\frac{\alpha}{2}t^2 + (\alpha+\beta)t + \frac{\alpha}{2} + \beta + \gamma\right)\mathrm{e}^t,\ y(t) = \left(\frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t + \gamma\right)\mathrm{e}^t,\ z(t) = \left(-\frac{\alpha}{2}t^2 - \beta t + \frac{\alpha}{2} - \gamma\right)\mathrm{e}^t.$$

Sujet 4

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $u = (1, 0, 1)$ et $v = (1, 1, 1)$ deux vecteurs de E. On définit l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f^2(v)$.

b) Soit $F = \text{Vect}(u)$ et $G = \text{Vect}(v, f(v))$. Montrer que ces deux sous-espaces sont stables par f et préciser les matrices des endomorphismes induits $f_{|F}$ et $f_{|G}$, respectivement dans les bases (u) et $(v, f(v))$.

c) Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans E ? La famille $(u, v, f(v))$ est-elle une base de E ?

d) Calculer l'image par f du vecteur $au + bv + cf(v)$, où a, b et c sont trois réels. En déduire que F est la seule droite vectorielle stable par f.

e) Soit $\mathcal{P}$ un plan vectoriel stable par f. Montrer que $G \cap \mathcal{P}$ est stable par f, puis en déduire que $\mathcal{P} = G$.

f) Conclure sur tous les sous-espaces de E stables par f.

Corrigé :

a) Un calcul facile donne $f(u) = (-2, 0, -2) = -2u$, $f(v) = (-1, 1, 0)$ et $f^2(v) = (-1, -1, -1) = -v$.

b) Soit $x \in F$. On peut écrire $x = \lambda u$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc $f(x) = \lambda f(u) = -2\lambda u = \lambda x \in F$, donc le sous-espace F est stable par f.
Soit $y \in G$, ainsi $y = \mu v + \nu f(v)$ pour μ et ν deux réels. On a alors $f(y) = \mu f(v) + \nu f^2(v) = \mu f(v) - \nu v \in G$, donc G aussi est stable par f.
L'endomorphisme induit $f_{|F}$ a pour matrice (-2) (on est en dimension 1) dans la base (u) et l'endomorphisme induit $f_{|G}$ a pour matrice dans la base $(v, f(v))$ (ces deux vecteurs sont clairement indépendants) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Soit $x \in F \cap G$. Alors $x = (a, 0, a) = (b - c, b + c, b)$ pour des réels a, b et c. On en déduit que $a = b = b - c$ d'où $c = 0$, et donc $b = 0 = a$, donc $x = 0_E$: les deux espaces F et G sont en somme directe, et comme la somme des dimensions est 3 qui est la dimension de E, on peut conclure que $E = F \oplus G$. On obtient alors une base de E en concaténant des bases de F et G, donc la famille $(u, v, f(v))$ est une base de E (le petit calcul le prouvait d'ailleurs).

d) On calcule cette image :

$$f(au + bv + cf(v)) = af(u) + bf(v) + cf^2(v) = -2au + bf(v) - cv.$$

Supposons que la droite engendrée par $y = au + bv + cf(v)$ soit stable : le vecteur obtenu par ce calcul est donc colinéaire à $au + bv + cf(v)$. On a donc proportionnalité entre les coordonnées (a, b, c) et $(-2a, -c, b)$, ce qui entraîne $-c = -2b$ et $b = -2c$, donc $b = c = 0$. La seule possibilité est donc que le vecteur de départ soit colinéaire à u, autrement dit la seule droite stable par f est F.

e) Si $y \in G \cap \mathcal{P}$, alors $f(y) \in G$ et $f(y) \in \mathcal{P}$ par stabilité des deux sous-espaces. On a donc $f(y) \in G \cap \mathcal{P}$, qui est donc un sous-espace stable.
Or le sous-espace $G + \mathcal{P}$, qui contient $\mathcal{P}$, ne peut être que $\mathcal{P}$ lui-même ou l'espace E entier. Si $G + \mathcal{P} = E$, alors par la formule de Grassmann $\dim(G \cap \mathcal{P}) = 1$, mais la seule droite stable par f est F, et ce cas est exclu car $F \not\subset G$. Par conséquent $G + \mathcal{P} = \mathcal{P}$, et donc $G \subset \mathcal{P}$, et par égalité des dimensions $G = \mathcal{P}$.

f) Les sous-espaces de E ont une dimension comprise entre 0 et 3. Les sous-espaces de dimension 0 et 3 sont $\{0_E\}$ et E, qui sont nécessairement stables par f, et on a vu que le seul sous-espace stable de dimension 1 est F et le seul sous-espace stable de dimension 2 est G. On conclut que les sous-espaces stables par f sont exactement $\{0_E\}$, F, G et E.

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u_n(x) = (-1)^{n-1}\binom{2n}{n}\dfrac{x^n}{2n-1}$.

a) Donner une condition suffisante sur x pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.

b) Montrer que pour $x = \dfrac{1}{4}$, la série est convergente.

Corrigé :

a) On peut utiliser le critère de d'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{\binom{2n+2}{n+1}|x|^n + 1(2n-1)}{\binom{2n}{n}|x|^n(2n+1)} = |x|\,\frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} = |x|\,\frac{(2n-1)(2n+2)}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4|x|.$$

Une condition suffisante de convergence est que $4|x| < 1$, soit $|x| < \dfrac{1}{4}$. Notons de plus que pour $|x| > \dfrac{1}{4}$, la série diverge. Les valeurs $\dfrac{1}{4}$ et $-\dfrac{1}{4}$ sont incertaines à ce stade.

b) Pour $x > 0$, la série est alternée. C'est en particulier le cas pour $x = \dfrac{1}{4}$. Étudions le sens de variation de la suite $\left(\left|u_n\left(\dfrac{1}{4}\right)\right|\right)$: d'après la question précédente

$$\frac{\left|u_{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)\right|}{\left|u_n\left(\frac{1}{4}\right)\right|} = \frac{(2n-1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{2n-1}{2n+2} < 1,$$

ce qui prouve que la suite $\left(\left|u_n\left(\frac{1}{4}\right)\right|\right)$ décroît. Pour déterminer sa limite, on utilise la formule de Stirling :

$$\left|u_n\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n (2n-1)} \sim \frac{\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{(2n-1)\left[\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right]^2 4^n} = \frac{2^{2n}2\sqrt{\pi n}}{2n(2\pi n)4^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}},$$

qui tend bien vers 0. Le théorème des séries alternées assure donc bien que la série est convergente pour $x = \frac{1}{4}$.

Sujet 5

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $]-1,+\infty[$.

b) Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 satisfaite par f.

c) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Corrigé :

a) Pour $x > -1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$, et en $+\infty$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} = o\left(\mathrm{e}^{-t}\right)$, fonction intégrable sur cet intervalle. Par comparaison d'intégrales de fonctions à valeurs positives, on peut conclure que la fonction f est bien définie sur $]-1,+\infty[$.

b) On cherche maintenant à dériver sous le signe intégrale :

- Pour tout $x > -1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, c'est ce qui vient d'être prouvé.
- Pour tout $t \in [1,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, et la dérivée partielle par rapport à x s'exprime par $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}$.
- Pour tout $x > -1$, la fonction $t \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ (par opérations algébriques et composition de fonctions continues).
- Si $a > -1$, alors pour $x \in [a,+\infty[$ et $t \in [1,+\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(a+t)^2},$$

  avec une fonction majorante positive, continue et intégrable sur $[1,+\infty[$ (pour la convergence en $+\infty$, on peut simplement majorer le numérateur par 1 et on se retrouve avec une fonction du type Riemann intégrable).

On peut donc conclure que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[a,+\infty[$, donc sur $]-1,+\infty[$, et on a la dérivée $f'(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

On peut procéder à une intégration par parties dans l'intégrale qui définit $f'(x)$, en dérivant e^{-t} et en prenant une primitive de $-\dfrac{1}{(x+t)^2}$:

$$f'(x) = \left[\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\mathrm{e}(x+1)} + f(x).$$

Toutes les expressions écrites ont bien un sens, par exemple parce que l'intégrale trouvée est $f(x)$ dont on a prouvé qu'elle est bien définie. On a donc prouvé que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' - y = -\dfrac{1}{\mathrm{e}(x+1)}$.

c) Cherchons des solutions développables en série entière de l'équation différentielle obtenue : on écrit $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et on obtient en insérant dans l'équation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^n,$$

d'où la relation de récurrence

$$(n+1)a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{\mathrm{e}},$$

qui permet de définir a_n pour tout n une fois connu $a_0 = y(0)$. Montrons que la suite (a_n) est bornée : si $M = \max\left(|a_0|, |a_1|, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, alors par construction $|a_0| \leqslant M$ et $|a_1| \leqslant M$. Si on suppose $|a_n| \leqslant M$ pour $n \geqslant 1$, alors

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{|a_n|}{n+1} + \frac{1}{\mathrm{e}(n+1)} \leqslant \frac{\left(M + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{n+1} \leqslant \frac{2M}{n+1} \leqslant M,$$

donc $\forall n \geqslant 0,\ |a_n| \leqslant M$. Comme la suite (a_n) est bornée, la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon au moins 1 donc définit une fonction au voisinage de 0. Comme on peut définir une telle série entière pour toute valeur de $a_0 = y(0)$, toute solution de l'équation différentielle est développable en série entière au voisinage de 0. C'est donc en particulier le cas pour la fonction f.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ qui conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle u(x), u(y)\rangle = 0.$$

a) Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \alpha\|x\|$.

b) En déduire que u est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

Corrigé :

a) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Pour $i \geqslant 2$, on a

$$\langle e_i - e_1, e_i + e_1\rangle = \|e_i\|^2 - \|e_1\|^2 = 0, \quad \text{donc} \quad \langle f(e_i - e_1), f(e_i + e_1)\rangle = 0 = \|f(e_i)\|^2 - \|f(e_1)\|^2 = 0.$$

Toutes les normes $\|f(e_i)\|$ sont donc égales, par conséquent il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\forall i, \|f(e_i)\| = \alpha$.

Soit maintenant $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in E$. On a alors par orthogonalité de la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$

$$\|f(x)\|^2 = x_1^2 \|f(e_1)\|^2 + \cdots + x_n^2 \|f(e_n)\|^2 = \alpha^2 (x_1^2 + \cdots + x_n^2) = \alpha^2 \|x\|^2,$$

d'où comme attendu $\|f(x)\| = \alpha \|x\|$.

b) Si $\alpha = 0$, u est l'endomorphisme nul, donc il peut s'écrire comme composée de l'homothétie nulle par n'importe quel endomorphisme orthogonal.

Si $\alpha \neq 0$, on pose $v = \dfrac{1}{\alpha} u$, et on a pour tout vecteur x

$$\|v(x)\| = \frac{1}{\alpha} \|u(x)\| = \|x\|,$$

donc v est un endomorphisme orthogonal, et donc u la composée de l'homothétie de rapport α et d'un endomorphisme orthogonal.