# Feuille d'exercices posés aux oraux 2024 aux élèves de PSI* de La-Fayette

## 1 ccINP

**Planche 1. ccINP** *(Lajoignie Maxime)*

**Exercice 1**

Un joueur effectue une suite de Pile ou Face indépendants, la probabilité d'obtenir Pile est de $p \in ]0,1[$, celle d'obtenir Face de $q = 1 - p$.
On note $N$ la variable aléatoire correspondant au rang du premier pile.
Lorsque $N = n$, on place $n$ boules numérotées de 1 à $n$ dans une urne.
Le joueur tire un boule `de manière équiprobable dans l'urne` et il gagne si elle est impaire.
On note $X$ `la variable aléatoire correspondant à` la valeur de la boule tirée.

1) Montrer que : $\sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int\limits_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$ pour $x \in ]0,1[$

On admet de même que : $\sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int\limits_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$ pour $x \in ]0,1[$

2) Reconnaître la loi de $N$.

3) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$ , $P(X = 2k+1) = \sum\limits_{n=2k+1}^{+\infty} P(X = 2k+1 | N = n) P(N = n)$

Montrer, en séparant en somme paire et impaire que :

$P(X = 2k+1) = \frac{p}{q} [\sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} + \sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j}]$

4) On admet que : $\frac{1}{(1-t^2)(1-t)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} + \frac{2}{(1-t)^2} \right)$

Calculer $P(A)$ avec $A$ l'événement le joueur gagne.

---

1) $\sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ a pour rayon de convergence 1 et on peut dériver terme à terme une série entière sur son intervalle ouvert de convergence.
Donc, pour $x \in ]0,1[$ , $\frac{d}{dx} \left( \sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \right) = \sum\limits_{j=k}^{+\infty} x^{2j} = \frac{x^{2k}}{1-x^2}$ (série géométrique de raison $x^2 \in ]0,1[$)

En intégrant entre 0 et $x \in ]0,1[$, on a : $\boxed{\forall x \in ]0,1[ \ , \ \sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int\limits_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt}$

2) $N$ est le temps d'attente du premier succès lors de $n$ épreuves de Bernoulli successives, indépendantes et de même paramètre $p$. On a donc : $\boxed{N \hookrightarrow G(p)}$

3) • $(N=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le système complet d'événements associé à la variable aléatoire $N$.
Par la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements on a donc :
$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ P(X=2k+1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X=2k+1|N=n)P(N=n)$

Comme $P(X=2k+1|N=n)=0$ si $n<2k+1$ (on ne peut pas tirer une boule qui n'est pas dans l'urne) alors : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ P(X=2k+1) = \sum\limits_{n=2k+1}^{+\infty} P(X=2k+1|N=n)P(N=n)}$

• Pour $n \geq 2k+1$, comme on a équiprobabilité $X|_{N=n} \hookrightarrow U(⟦1;n⟧)$ et donc
$P(X=2k+1|N=n) = \frac{1}{n}$.
Comme on connaît la loi de $N$, on sait que : $P(N=n) = pq^{n-1}$

On a donc $P(X=2k+1) = \sum\limits_{n=2k+1}^{+\infty} \frac{pq^{n-1}}{n} = \frac{p}{q}\sum\limits_{n=2k+1}^{+\infty} \frac{q^n}{n}$

En séparant les termes pairs des termes impairs ($n=2j$ ou $n=2j+1$) on a :

$$\boxed{P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\Big(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\Big)}$$

4) On reprend le calcul ci-dessus, alors avec le 1) et la somme admise :

$$P(X=2k+1) = \frac{p}{q}[\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt] = \frac{p}{q}[\int_0^q (\frac{t^{2k}(1+t)}{(1-t)(1+t)}] = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt$$

Comme $A = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}(X=2k+1)$ et que les événements $(X=2k+1)_{k\in\mathbb{N}}$ sont incompatibles alors :
$P(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt$

Comme sur l'intervalle $[0,q]$ la suite de fonctions $(t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{p}{q}\frac{t^{2k}}{1-t})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\frac{1}{(1-t^2)(1-t)}$ on peut intervertir la somme et l'intégrale et on a :

$$P(A) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t^2)(1-t)}dt$$

En utilisant la décomposition en éléments simples admise :
$P(A)$
$= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} + \frac{2}{(1-t)^2}\Big)dt$
$= \frac{p}{4q}\Big[ln(1+t) - ln(1-t) + \frac{2}{1-t}\Big]_0^q$
$= \frac{p}{4q}\Big(ln(1+q) - ln(1-q) + \frac{2}{1-q}\Big)$ mais $q = 1-p$
$= \frac{p}{4q}ln(\frac{2-p}{p}) + \frac{1}{2(1-p)}$ On a donc : $\boxed{P(A) = \frac{p}{4q}ln(\frac{2-p}{p}) + \frac{1}{2(1-p)}}$

**Exercice 2**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

1) Déterminer le spectre de $A$.
2) $A$ est elle diagonalisable ?
3) `Réduire` $A$

---

1) En développant par rapport à la deuxième colonne :
$\chi_A(X) = (X-1)((X-a)^2-1) = (X-1)(X-a+1)(X-a-1)$ donc $\boxed{sp(A) = \{1, a+1, a-1\}}$

2) $A$ est symétrique réelle donc : $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

3) On remarque que $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre 1.

On remarque que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $a+1$.

On remarque que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (a-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $a-1$.

Comme $(e_1, e_2, e_3)$ est une base, on a, par réunion des bases des sous-espaces propres et par formule de changement de bases : $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}}$

Remarque : on aurait pu utiliser la méthode "traditionnelle" pour trouver les vecteurs propres ...

---

**Planche 2. ccINP (Noé Thomas)**

**Exercice 1** On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et $\forall (P,Q) \in E^2$ , $\varphi(P,Q) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)dt$

1) Montrer que $\varphi$ définit un produit scalaire sur $E$.

2) Déterminer pour tout $n$ entier, $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^n dt$

3) Calculer $I = \inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$

4) Soit $n \geq 2$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ , } \int\limits_0^{+\infty} te^{-t}P(t)dt = 0\}$

Montrer que $H$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer la distance $d$ entre $X-1$ et $H$.

1) $\bullet$ On commence par montrer que l'intégrale définissant $<,>$ est convergente.
Soit $R \in E$. Alors $t \mapsto e^{-t}R(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
De plus $\frac{e^{-t}R(t)}{e^{-t/2}} = e^{-t/2}R(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{-t}R(t) = o(e^{-t/2})$ au voisinage de $+\infty$.
Comme $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, alors, par négligeabilité $t \mapsto e^{-t}R(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$
On en déduit que $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}R(t)dt$ est convergente.
En particulier si $(P,Q) \in E^2$, alors en posant $R = PQ$ on a : $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)dt$ convergente et donc $<,>$ est bien définie sur $E^2$.

$\bullet$ Soit $(P,Q,R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
i) $< P, Q+\lambda R >= \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)(Q(t)+\lambda R(t))dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)dt + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)R(t)dt$ par linéarité de l'intégrale et puisque les intégrales sont convergentes
et donc $< P, Q+\lambda R >=< P,Q > +\lambda < P,R >$
ii) On a : $< P,Q >=< Q,P >$, évident par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
iii) $< P,P >= \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)^2dt \geq 0$ car $\forall t \geq 0$ , $e^{-t}P(t)^2 \geq 0$ et positivité de l'intégrale.
iv) $< P,P >= 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)^2dt$
Mais $t \mapsto e^{-t}P(t)^2$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.
Donc par le théorème de l'intégrale nulle, on a $\forall t \geq 0$ , $e^{-t}P(t)^2 = 0$ et donc $P(t) = 0$
$P$ est alors un polynôme ayant une infinité de racines et donc $P = 0_E$

On a alors : $\forall (P,Q,R) \in E^3$ , $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , $\begin{cases} i) < P, Q+\lambda R >=< P,Q > +\lambda < P,R > \\ ii) < P,Q >=< Q,P > \\ iii) < P,P >\geq 0 \\ iv) < P,P >= 0 \Longrightarrow P = 0_E \end{cases}$ et on en déduit que : $\boxed{<,> \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

2) Pour $k \geq 1$ et par intégration par parties, comme $\lim\limits_{t\to+\infty} t^ke^{-t} = 0$ et que les intégrales sont convergentes :

$$I_k = [-e^{-t}t^k]_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}kt^{k-1}dt \text{ et donc } I_k = kI_{k-1}$$

$$I_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

On reconnaît la formule de récurrence définissant la factorielle (on peut aussi faire une récurrence) et on a : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \ , \ I_k = k!}$

3) $\bullet$ On va commencer par trouver une base orthogonale de $F$ en appliquant le procédé de Schmidt à la base canonique de $F$.

On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2$, ainsi la base canonique est la base $(P_0,P_1,P_2)$ et on construit $(Q_0,Q_1,Q_2)$ une base orthonormée de $F$.

Etape 1 : On pose $Q_0 = \frac{P_1}{||P_1||}$

$||P_1||^2 =< P_1, P_1 >= \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}dt = I_0 = 0! = 1$

On a donc $Q_0 = 1$

Etape 2 : On pose $Q_1 = \frac{P_1 - <P_1, Q_0> Q_0}{||P_1 - <P_1, Q_0> Q_0||}$
$< P_1, Q_0 >=< X, 1 >= I_1 = 1$ donc $\tilde{Q_1} = P_1 - < P_1, Q_0 > Q_0 = X - 1$
$< \tilde{Q_1}, \tilde{Q_1} >=< X - 1, X - 1 >=< X^2 - 2X + 1, 1 >= I_2 - 2I_1 + I_0 = 2! - 2.1 + 1 = 1$ et donc $Q_1 = X - 1$

Etape 3 : On pose $Q_2 = \frac{P_2 - <P_2, Q_0> Q_0 - <P_2, Q_1> Q_1}{||P_2 - <P_2, Q_0> Q_0 - <P_2, Q_1> Q_1||}$
On pose $\tilde{Q_2} = P_2 - < P_2, Q_0 > Q_0 - < P_2, Q_1 > Q_1$
$< P_2, Q_0 >=< X^2, 1 >= I_2 = 2$ , $< P_2, Q_1 >=< X^2, X - 1 >= I_3 - I_2 = 6 - 2 = 4$
Donc $\tilde{Q_2} = X^2 - 2 - 4(X - 1) = X^2 - 4X + 2$
$< \tilde{Q_2}, \tilde{Q_2} >=< X^2 - 4X + 2, X^2 - 4X + 2 >=< (X^2 - 4X + 2)^2, 1 >$
donc $< \tilde{Q_2}, \tilde{Q_2} >=< X^4 + 16X^2 + 4 + 4X^2 - 16X - 8X^3, 1 >$
donc $< \tilde{Q_2}, \tilde{Q_2} >= I_4 - 8I_3 + 20I_2 - 16I_1 + 4I_0 = 4.6 - 8.6 + 40 - 16 + 4 = -24 + 24 + 4 = 4$
Donc $Q_2 = \frac{X^2 - 4X + 2}{2}$

Bilan : $(Q_0, Q_1, Q_2) = (1, X - 1, \frac{X^2 - 4X + 2}{2})$ est une base orthonormée de $F$.

• Par définition $d = d(X^3, F) = ||X^3 - R||$ ou $R$ est la projection orthogonale de $X^3$ sur $F$. Par le théorème de projection orthogonale, comme $(Q_0, Q_1, Q_2)$ est une base orthonormée de $F$ :
$R =< X^3, Q_0 > Q_0 + < X^3, Q_1 > Q_1 + < X^3, Q_2 > Q_2$
$< X^3, Q_0 >=< X^3, 1 >= I_3 = 6$ ,
$< X^3, Q_1 >=< X^3, X - 1 >= I_4 - I_3 = 24 - 6 = 18$ ,
$< X^3, Q_2 >=< X^3, \frac{X^2 - 4X + 2}{2} >= \frac{I_5 - 4I_4 + 2I_3}{2} = \frac{120 - 96 + 12}{2} = 18$
Donc $R = 6 + 18(X - 1) + 18\frac{X^2 - 4X + 2}{2} = 9X^2 - 18X + 6$

On a alors : $d = ||X^3 - R||$ qui, après application numérique (longue) donne : $\boxed{d = 6}$

4) $H = (vect(X))^\perp$, donc $H$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$

On pose $R = X - 1$ et $R^\perp$ le projeté orthogonal de $R$ sur $vect(X)$.
Alors $R^\perp = \frac{<R, X>}{<X, X>} X = \frac{<X - 1, X>}{<X, X>} X = \frac{<X, X> - <X, 1>}{<X, X>} X = \frac{I_2 - I_1}{I_2} X = \frac{2 - 1}{2} X = \frac{1}{2} X$

$d = ||R^\perp|| = \sqrt{< R^\perp, R^\perp >} = \frac{1}{2}\sqrt{< X, X >} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\boxed{d = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

---

**Exercice 2**

Soit $n \geq 1$ et $E = M_n(\mathbb{R})$, $S_n(R) = \{M \in E \ , \ M = M^t\}$ et $A_n(R) = \{M \in E \ , \ M = -M^T\}$.

a) Montrer que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

b) `Déterminer` $\varphi$ `la projection sur` $S_n(\mathbb{R})$ `parallèlement à` $A_n(\mathbb{R})$.

---

a) Le début est une question de cours.

Si $M \in E$, alors $M = \underbrace{\dfrac{M + M^T}{2}}_{\in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\dfrac{M - M^T}{2}}_{\in A_n(\mathbb{R})}$, donc $E \subset S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$

Comme l'autre inclusion est évidente : $E = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$

De plus : $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} M = M^T \\ M = -M^T \end{cases} \Rightarrow 2M = 0_E \Rightarrow M = 0_E$

Donc $S_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{R}) \subset \{0_E\}$ et comme l'autre inclusion est évidente : $S_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{R}) = \{0_E\}$.

La somme $S_n(\mathbb{R})+A_n(\mathbb{R})$ est donc directe, et en utilisant le résulat précédent : $\boxed{E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})}$

b) Avec la décomposition du a) : $\boxed{\forall M \in E \ , \ \varphi(M) = \frac{M+M^T}{2}}$

---

**Planche 3. ccINP (Evangelista William)**

**Exercice 1**

Soit $n \geq 2$ et $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})$ telles que : $AB - BA = A$

On pose pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$ , $f(X) = XB - BX$

1) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$

2) Calculer la trace de $A$ puis la trace de $A^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

---

1) Pour $(X, Y, \lambda) \in (M_n(\mathbb{R}))^2 \times \mathbb{R}$ , $f(X + \lambda Y) = f(X) + \lambda f(Y)$ par linéarité du produit. Comme $f$ est de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$, alors $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } M_n(\mathbb{R})}$

2) • $tr(A) = tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = tr(AB) - tr(AB) = 0$

• De même : $tr(A^{k+1}) = tr(A^k(AB - BA))$ car $A = AB - BA$

$tr(A^{k+1}) = tr(A^{k+1}B) - tr((A^kB)(A)) = tr(A^{k+1}B) - tr((A)(A^kB))tr(A^{k+1}B) - tr(A^{k+1}B) = 0$

car $tr(MN) = tr(NM)$ On a donc : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \ , \ tr(A^k) = 0}$

---

**Exercice 2**

Soit $(E) \Leftrightarrow x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0$

a) Trouver les solutions $DSE_0$ de $(E)$.

b) Pourquoi y-a-t-il d'autres solutions sur $]0,1[$ ?

c) En utilisant $y(x) = \frac{z(x)}{x-1}$ trouver toute les solutions sur $]0,1[$.

---

a) Supposons que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et est une solution de $E$ sur $]-R;R[$

Comme on peut dériver une série entière terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence alors : $\forall x \in ]-R;R[$ , $\begin{cases} y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases}$

On a alors :

$y$ solution de $E$ sur $]-R;R[$

$\Leftrightarrow \forall x \in ]-R;R[ \ , \quad x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in ]-R;R[ \ , \quad x(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (1-3x) \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in ]-R;R[ \ , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in ]-R;R[ \ , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} [n(n-1)a_n + n a_n] x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} [n(n-1)a_n + 3n a_n + a_n] x^n = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in ]-R;R[ \ , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+2n+1) a_n x^n = 0$

$\Leftrightarrow (1)$

On a pu regrouper les sommes car elles sont toutes convergentes car ce sont des séries entières de même rayon de convergence $R$.

Changement d'indice : $p = n-1$ dans la première somme et $p = n$ dans la deuxième.

$(1) \Leftrightarrow \forall x \in ]-R;R[ \ , \ \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)^2 a_{p+1} x^p - \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)^2 a_p x^p = 0$

$\forall x \in ]-R;R[ \ , \ \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)^2 (a_{p+1} - a_p) x^p = 0$

On a fait commencer les sommes au même indice et remarquer que pour $p = -1$ le terme est nul dans la première somme :

Par unicité du $DSE_0$, puisque $R > 0$

$(1) \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}\ ,\ (p+1)^2(a_{p+1} - a_p) \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}\ ,\ a_{p+1} = a_p$

La suite $a_p$ est donc constante et on a : $y(x) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} x^p = \frac{a_0}{1-x}$

On a reconnu une série entière du cours de rayon de convergence $R = 1 > 0$

Comme, on a raisonné par équivalences et que $R > 0$ on sait peut remonter les équivalences.

Conclusion : $\boxed{\text{Les solutions développables en séries entières en 0 de } E\text{, sont définies sur } ]-1,1[}$ $\boxed{\text{et s'écrivent : } y(x) = \frac{a_0}{1-x} \text{ avec } a_0 \in \mathbb{R}}$

b) Comme $x(1-x) \neq 0$ sur $]0,1[$, $(E)$ est une équation différentielle d'ordre 2 homogène à coefficients continues, donc d'après le cours, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.
Comme au a) on a trouvé une droite, alors $\boxed{\text{il y a d'autre solution.}}$

c) Comme $1 - x \neq 0$ sur $]0,1[$, on peut effectuer dans $(E)$ le changement de fonction inconnue $y(x) = \frac{z(x)}{x-1}$
On a : $y = \frac{z}{x-1}$, $y' = \frac{z'}{x-1} - \frac{z}{(x-1)^2}$ et $y'' = \frac{z''}{x-1} - 2\frac{z'}{(x-1)^2} + \frac{2z}{(x-1)^3}$

Alors : $(E)$
$\Leftrightarrow x(1-x)[\frac{z''}{x-1} - 2\frac{z'}{(x-1)^2} + \frac{2z}{(x-1)^3}] + (1-3x)[\frac{z'}{x-1} - \frac{z}{(x-1)^2}] - \frac{z}{x-1} = 0$
$\Leftrightarrow -xz'' + \frac{2xz'}{x-1} - \frac{2zx}{(x-1)^2} + \frac{z'}{x-1} - \frac{3xz'}{x-1} - \frac{z}{(x-1)^2} + \frac{3xz}{(x-1)^2} - \frac{z}{x-1} = 0$
$\Leftrightarrow -xz'' - \frac{xz'}{x-1} + \frac{zx}{(x-1)^2} + \frac{z'}{x-1} - \frac{z}{(x-1)^2} - \frac{z}{x-1} = 0$
$\Leftrightarrow -xz'' - \frac{xz'}{x-1} + \frac{zx}{(x-1)^2} + \frac{z'}{x-1} - \frac{z}{(x-1)^2} - \frac{z}{x-1} = 0$
$\Leftrightarrow -xz'' + \frac{(1-x)z'}{x-1} + z[\frac{x-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}] = 0$
$\Leftrightarrow -xz'' - z' = 0$ on pose $Z = z'$
$\Leftrightarrow Z' = \frac{-1}{x}Z$ on a une $EDL_1$ homogène, comme $\int \frac{-1}{x}dx = ln(x)$ sur $]0,1[$, d'après le cours
$\Leftrightarrow Z(x) = aexp(-ln(x))$ avec $a \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow Z(x) = a\frac{1}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow z'(x) = a\frac{1}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow z(x) = aln(x) + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et on utilise $y(x) = \frac{z(x)}{x-1}$
$\Leftrightarrow y(x) = \frac{aln(x)+b}{x-1}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Comme on a raisonné par équivalences, on a que :
$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } ]0,1[ \text{ s'écrivent : } \forall x \in ]0,1[\ ,\ y(x) = \frac{aln(x)+b}{x-1} \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2}$

**Planche 4. ccINP (Fontbonne Océane et Tobilov Aboumouslim)**

**Exercice 1**

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = Id_E$ et $f \neq Id_E$.

1) Montrer que 1 est valeur propre de $f$.

2) Montrer que $E = ker(f - Id_E) \oplus ker(f^2 + f + Id_E)$

3) Montrer qu'il existe une base $B$ de $E$ telle que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

---

1) • Comme $f \in L(\mathbb{R}^3)$, son polynôme caractéristique $\chi_f$ est de degré 3 et son coefficient dominant vaut 1. Il s'écrit donc $\chi_f(X) = X^3 + Q_f(X)$ avec $deg(Q_f) \leq 2$.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \chi_f(x) = -\infty$.
Comme de plus $\chi_f$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors, avec le théorème des valeurs intermédiaires :
$\exists \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \chi_f(\lambda) = 0$
$f$ admet donc, au moins une valeur propre réelle.

• $X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de $f$. Donc $sp(f) \subset R$, avec $R$ l'ensemble des racines de $X^3 - 1$.
Comme $R$ admet une unique racine réelle : 1, et que $f$ admet au moins une racine réelle, alors on peut conclure que : $\boxed{\text{1 est valeur propre de } f.}$

2) • $x \in ker(f - Id_E) \cap ker(f^2 + f + Id_E)$
$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - x = 0_E \\ f^2(x) + f(x) + x = 0_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ x + x + x = 0_E \end{cases} \Leftrightarrow x = 0_E$
On a donc $ker(f - Id_E) \cap ker(f^2 + f + Id_E) = \{0_E\}$ et la somme $ker(f - Id_E) + ker(f^2 + f + Id_E)$ est directe.

• Analyse : Soit $x \in E$.
Supposons que $x$ s'écrive : $x = a + b$ avec $a \in ker(f - Id_E)$ et $b \in ker(f^2 + f + Id_E$
Alors $f(a) = a$ et $f^2(b) + f(b) + b = 0_E$
Alors $x = a + b \Rightarrow f(x) = a + f(b)$ et $f^2(x) = a + f^2(b)$.
On ajoute ces trois équation et on obtient : $x + f(x) + f^2(x) = 3a + \underbrace{(b + f(b) + f^2(b))}_{=0_E}$

On a donc $a = \frac{x + f(x) + f^2(x)}{3}$ et $b = x - a = \frac{2x - f(x) - f^2(x)}{3}$

Synthèse : Soit $x \in E$. On pose $a = \frac{x+f(x)+f^2(x)}{3}$ et $b = x - a = \frac{2x-f(x)-f^2(x)}{3}$
Alors $f(a) = \frac{f(x)+f^2(x)+f^3(x)}{3} \underbrace{=}_{f^3=Id_E} \frac{f(x)+f^2(x)+x}{3} = a$ donc $a \in ker(f - Id_E)$
De même
$b + f(b) + f^2(b) = \frac{2x-f(x)-f23(x)}{3} + \frac{2f(x)-f^2(x)-x}{3} + \frac{2f^2(x)-x-f(x)}{3} = 0_E$ donc $b \in ker(Id_E + f + f^2)$
De plus, (après ce "combat des chefs"), $a + b = x$, donc $x \in ker(f - Id_E) + ker(f^2 + f + Id_E)$

Alors $E \subset ker(f - Id_E) + ker(f^2 + f + Id_E)$ et comme l'autre inclusion est évidente on obtient : $E = ker(f - Id_E) + ker(f^2 + f + Id_E)$

• La somme étant directe (premier point) : $\boxed{E = ker(f - Id_E) \oplus ker(f^2 + f + Id_E)}$

3) • Si on suppose que $ker(f^2 + f + Id_E) = \{0_E\}$ alors, avec le 2) on a : $E = ker(f - I_dE)$ et donc $f = Id_E$. Absurde par Hypothèse donc $ker(f^2 + f + Id_E) \neq \{0_E\}$

• Soit donc $b \in ker(f^2 + f + Id_E)$ tel que $b \neq 0_E$.
On sait aussi, d'après 1), que 1 est valeur propre de $f$, donc $\exists a \neq 0_E$ tel que $f(a) = a$
Montrons que $B = (a, b, f(b))$ est une base de $E$.

Montrons d'abord que $B$ est libre : soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ , $\alpha a + \beta b + \gamma f(b) = 0_E$
En composant par $f$ : $\alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f^2(b) = 0_E$
En recomposant par $f$ : $\alpha f^2(a) + \beta f^2(b) + \gamma b = 0_E$
On utilise $f(a) = a$ et on a le système : $\begin{cases} \alpha a + \beta b + \gamma f(b) = 0_E \\ \alpha a + \beta f(b) + \gamma f^2(b) = 0_E \\ \alpha a + \beta f^2(b) + \gamma b = 0_E \end{cases}$
En ajoutant les trois équations, comme $b + f(b) + f^2(b) = 0_E$ alors $3\alpha a = 0_E$ et comme $a \neq 0_E$, alors $\alpha = 0$
Il reste : $\begin{cases} \beta b + \gamma f(b) = 0_E \\ \beta f(b) + \gamma f^2(b) = 0_E \\ \beta f^2(b) + \gamma b = 0_E \end{cases}$ On effectue : $\gamma L_1 - \beta L_3$ et on oublie $L_3$
$\Rightarrow \begin{cases} \gamma^2 f(b) - \beta^2 f^2(b) = 0_E \\ \beta f(b) + \gamma f^2(b) = 0_E \end{cases}$ on fait $\gamma L_1 + \beta^2 L_2$
$\Rightarrow (\gamma^3 + \beta^3) f(b) = 0_E$
Comme $f^3(b) = b \neq 0_E$ alors $f(b) \neq 0_3$ et donc $\alpha^3 + \beta^3 = 0$ et donc $\beta = -\gamma$
En revenant au premier système, on a : $\begin{cases} \beta b - \beta f(b) = 0_E \\ \beta f(b) - \beta f^2(b) = 0_E \\ \beta f^2(b) - \beta b = 0_E \end{cases}$

Si $\beta \neq 0$ alors $b = f(b) = f^2(b)$ et donc $3b = b + f(b) + f^2(b) = 0_E$ car $b \in ker(Id_E + f + f^2)$ ce qui est absurde.
On a donc $\beta = 0$.
Finalement $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et donc $B$ est libre.

Remarque : autre méthode pour montrer que $\beta=\gamma=0$ lorsque l'on a déjà $\alpha=0$
Par l'absurde, si $\gamma\neq 0$ alors $f(b)=\frac{-\beta}{\gamma}b$ et comme $b\neq 0_E$ alors $b$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre réelle $\frac{-\beta}{\gamma}$.
Comme $sp_{\mathbb{R}}(f)=\{1\}$ alors $b\in A$.
Donc $b\in A\cap B=\{0_E\}$, ce qui donne $b=0_E$ absurde , donc $\gamma=0$. On a ensuite facilement $\beta=0$

- Comme $card(B)=dim(E)$ et que $B$ est libre, alors $B$ est une base de $E$.

Comme $f(a)=a$, $f(b)=f(b)$, $f(f(b))=f^2(b)=-b-f(b)$ alors la matrice de $f$ dans la base $B$ est $A=M_B(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

- Posons $R=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ et appelons $g$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admettetant $R$ comme matrice relativement à la base canonique.

Alors, comme $R\neq I_3$ et $R^3=I_3$ on a : $\begin{cases}g\neq Id_E\\ d^3=Id_E\end{cases}$ .
$g$ vérifie donc les mêmes hypothèses que $f$ et donc ; il existe une base $B'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_{B'}(g)=A$
On a donc $A$ semblable à $R$.
On a $M_B(f)$ semblable à $A$, $M_{B_c}(g)=R$ semblable à $A$ donc $M_B(f)$ est semblable à $R$ et donc

- Bilan : $\boxed{\text{Il existe une base } B'' \text{ de } E \text{ dans laquelle } f \text{ a pour matrice } R}$

---

**Exercice 2**

Soit $I=]0,+\infty[$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha<1$.
On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ , $\forall x\in I$ , $f_n(x)=x(1+n^\alpha e^{-nx})$

1) Montrer la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $I$ vers une fonction $f$ que l'on précisera.

2) Montrer que $y\mapsto ye^{-y}$ est bornée sur $I$

3) Montrer la convergence uniforme de la suite $(f_n)$ sur $I$.

4) Calculer $\int\limits_0^1 x(1+n^\alpha e^{-nx})dx$

---

1) Par comparaison exp-puissance, pour $x>0$ on a : $n^\alpha e^{-nx}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x$.

Donc : $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } \begin{array}{cccc} f & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & & x & \longmapsto & x\end{array}}$

2) Posons : $\forall y \geq 0\ ,\ a(y) = ye^{-y}$. Alors $a$ est $C^1$ et $a'(y) = (1-y)e^{-y}$.

On a alors le tableau de variation suivant :

| $y$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a'(y)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $a(y)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

On a donc : $\forall y \in I\ ,\ |ye^{-y}| \leq \frac{1}{e}$, donc $\boxed{y \mapsto ye^{-y} \text{ est bornée sur } I.}$

3) $\forall x \in I\ ,\ |f_n(x) - f(x)| = |xe^{-nx}n^{\alpha}| = n^{\alpha-1}\underbrace{(nx)e^{-nx}}_{\leq \frac{1}{e}} \leq \frac{1}{en^{1-\alpha}}$

On peut donc définir $||f_n - f||_{\infty} = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ et on a $||f_n - f||_{\infty} = \leq \frac{1}{en^{1-\alpha}}$

Comme $\alpha < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{en^{1-\alpha}} = 0$, donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty} = 0$ et donc : $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } I.}$

4) Comme $f_n$ converge uniformément vers $f$ sur $I$ (qui est borné), alors d'après le cours : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} xdx = \frac{1}{2}$

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}}$

---

**Planche 5. ccINP (Mathieu Testeil)**

**Exercice 1**

On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ I_n = \int\limits_0^1 ln(1+t^n)dt$

1) Montrer que $I_n$ est bien définie.

2) Montrer que $(I_n)$ converge et déterminer sa limite.

3) Montrer que : $I_n \sim \frac{1}{n}\int\limits_0^1 \frac{ln(1+u)}{u}du$

4) Sachant que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ montrer que : $I_n \sim \frac{\pi^2}{12n}$

---

1) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\begin{array}{cccccc} f_n & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & ln(1+t^n) \end{array}$

Alors, on a une suite de fonction continue sur $I$.

Comme une fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment alors :

$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$

2) • Pour $t \in [0,1[$ , $f_n(t) = ln(1+t^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

• De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $\forall t \in [0,1[$ , $0 \leq |f_n(t)| \leq ln(2)$

• On a donc :

$$\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont continue par moceaux sur } I \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers la fonction nulle sur } I \text{qui est continue par morceaux sur } I \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall t \in [0,1[ \ , \ 0 \leq |f_n(t)| \leq ln(2) \text{ avec } t \mapsto ln(2) \text{ qui est intégrable sur } I \end{cases} ,$$

on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} 0dt = 0$$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ (donc $n \neq 0$), effectuons dans $I_n$ le changement de variable $u = t^n$.
On a : $t = u^{1/n}$ donc $dt = \frac{1}{n}u^{1/n-1}du$

Alors : $I_n = \int_0^1 ln(1+u)\frac{1}{n}u^{1/n-1}du = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{ln(1+u)}{u}u^{1/n}du$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $J_n = \int_0^1 \frac{ln(1+u)}{u}u^{1/n}du$ et $\begin{array}{rccc} g_n & : & ]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \frac{ln(1+u)}{u}u^{1/n} \end{array}$

Alors les $g_n$ sont continue par morceaux sur $I$, et $\lim_{n\to+\infty} g_n(u) = \frac{ln(1+u)}{u}$
Donc $(g_n)$ converge simplement vers $g : u \mapsto \frac{ln(1+u)}{u}$ sur $]0,1]$

De plus : $\forall u \in ]0,1]$ , $0 \leq g_n(u) \leq \frac{ln(1+u)}{u}$ avec $u \mapsto \frac{ln(1+u)}{u}$ qui est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$ car continue et prolongeable par continuité en 0.

Comme au 2), on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t)du = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} g_n(t)du = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} g(u)du = \int_0^1 \frac{ln(1+u)}{u}du$$

On reporte ce résultat dans la relation reliant $I_n$ et $J_n$ et on obtient : $\boxed{I_n \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{ln(1+u)}{u}du}$

4) • D'après le cours : $\forall u \in ]0,1[$ , $ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}u^n$

Donc $\forall u \in ]0,1[$ , $\frac{ln(1+u)}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}u^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}u^n$

Posons $\begin{array}{rccc} h & : & ]0,1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \frac{ln(1+u)}{u} \end{array}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ , $\begin{array}{rccc} h_n & : & ]0,1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \frac{(1)^n}{n+1}u^n \end{array}$

Alors par construction $\sum_{n=0}^{+\infty} h_n$ converge simplement vers $h$ sur $]0,1[$

On a aussi : $\int_0^1 |h_n(u)|\,du = \int_0^1 \frac{1}{n+1}u^n du = \frac{1}{(n+1)^2}$

Comme $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ est convergente par Riemann, alors $\sum \int_0^1 |h_n(u)|\,du$ est convergente.

On a donc : $\begin{cases} \text{les fonctions } h_n \text{ sont continue par morceaux et intégrables sur } ]0,1[ \\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \text{ converge simplement vers } h \text{ sur } ]0,1[ \\ \sum \int\limits_0^1 |h_n(u)|\, du \text{ est convergente} \end{cases}$ , on peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on en déduit que :

$\int\limits_0^1 \frac{ln(1+u)}{u} du$

$= \int\limits_0^1 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} h_n(u) du$

$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^1 h_n(u) du$ même calcul qu'avec la valeur absolue (signe constant)

$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

- Mais $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1+1}}{(2k+1)^2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k)^2} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{\pi^2}{24}$

avec le résultat donné par l'énoncé

D'autre part : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Alors : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$ et on a finalement : $\int\limits_0^1 \frac{ln(1+u)}{u} du = \frac{\pi^2}{12}$

Et en utilisant le 3) : $\boxed{I_n \sim \frac{\pi^2}{12n}}$

---

**Exercice 2** (déjà tombé en 2023)

Soit une suite de variable aléatoire `indépendantes` $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

On suppose que chaque $X_k$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_k \in ]0,1[$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $P_n = \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}$.
a) Donner l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.
b) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) = 0$
Soit $\varepsilon > 0$.
c) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - P_n\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = 0$
On suppose que : $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = p$.
d) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon) = 0$

---

a) On a pour tout $k$ : $\mathbb{E}(X_k) = p_k$ et $\mathbb{V}(X_k) = p_k(1-p_k)$.
Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) = P_n$
Comme les variables aléatoires $(X_k)$ sont indépendantes, et par propriété de la variance :
$V(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k(1-p_k)}{n^2}$

On a donc : $\boxed{\mathbb{E}(\frac{S_n}{n}) = P_n \text{ et } \mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k(1-p_k)}{n^2}}$

b) Comme $0 \leq p_k(1-p_k) \leq 1$ alors $0 \leq \mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} 1}{n^2} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\boxed{\mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

c) $\mathbb{P}(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - P_n\right| \geq \frac{\epsilon}{2}) = \mathbb{P}(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(\frac{S_n}{n})\right| \geq \frac{\epsilon}{2}) \leq \frac{\mathbb{V}(\frac{S_n}{n})}{\epsilon^2/4}$ par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Comme par le b) on a $\mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - P_n\right| \geq \frac{\epsilon}{2}) = 0}$

d) $\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right| = \left|\frac{S_n}{n} - p\right| = \left|\frac{S_n}{n} - P_n + P_n - p\right| \leq \left|\frac{S_n}{n} - P_n\right| + |P_n - p|$

Comme on a supposé $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = p$ alors $\exists N \in \mathbb{N}^*$ , $n \geq N \Rightarrow |P_n - p| \leq \frac{\epsilon}{2}$
Donc pour $n \geq N$, $\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right| \leq \left|\frac{S_n}{n} - P_n\right| + \frac{\varepsilon}{2}$
On a donc : $\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon \Rightarrow \left|\frac{S_n}{n} - P_n\right| \geq \frac{\epsilon}{2}$
Donc $(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right|) \subset (\left|\frac{S_n}{n} - P_n\right| \geq \frac{\epsilon}{2})$ et donc :
$\mathbb{P}(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(\left|\frac{S_n}{n} - P_n\right| \geq \frac{\epsilon}{2})$
Avec la limite du c) on a finalement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon) = 0}$

---

**Planche 6. ccINP (Maeva Cluzel)**

**Exercice 1**

On pose pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ , $u_n(x) = \frac{ln(x)}{x^n ln(n)}$

1) Déterminer le domaine de définition $D$ de $\sum u_n(x)$.

On note $S = \sum\limits_{n\geq 2} u_n$

2) Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement vers $S$ sur $D$.

3) a) Montrer que pour $n \geq 2$ et $x \geq 1$ : $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \frac{1}{ln(n+1)}$

3) b) En déduire que $S$ est continue sur $D$.

4) $S$ est-elle intégrable sur $D$ ?
Si oui, donner la valeur de $\int\limits_D S$ sous forme de série.

1) Déjà il faut que $ln(x)$ soit défini, on suppose donc que $x > 0$. Alors : $u_n(x) = ln(x)(\frac{1}{x})^n \frac{1}{ln(n)}$

Si $0 < x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 1$ alors, par comparaison exp-puissance, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$ donc $\sum u_n(x)$ est divergente.

Si $x = 1$, alors $u_n(x) = 0$ donc la série est convergente.
Si $x > 1$, on a $\frac{u_n(x)}{\frac{1}{n^2}} = ln(x)(\frac{1}{x})^n \frac{n^2}{ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par comparaison des fonctions usuelles puisque $\frac{1}{x} \in ]0,1[$
Donc $u_n(x) = o(\frac{1}{n^2})$. Comme par, Riemann, $\sum \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente alors, par négligeabilité, $\sum u_n(x)$ est convergente.

$\boxed{\text{Le domaine } D \text{ de } S \text{ est donc } D = [1, +\infty[}$

2) • Pour $n \geq 2$, on a $u_n$ qui est $C^\infty$ sur $D$ et $\forall x \in D$ :
$u_n'(x) = \frac{1}{ln(n)}[\frac{1}{x^{n+1}} - ln(x)\frac{n}{x^{n+1}}] = \underbrace{\frac{1}{ln(n)x^{n+1}}}_{\geq 0}(1 - nln(x))$
$1 - nln(x) = 0 \Leftrightarrow ln(x) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow x = e^{1/n}$

On a donc le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | | $e^{1/n}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $u_n(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $u_n(e^{1/n})$ | $\searrow$ | $0$ |

$u_n(e^{1/n}) = \frac{1}{enln(n)}$, donc on peut définir $||u_n||_\infty = \sup\limits_{x\in D} |u_n(x)| = \frac{1}{enln(n)}$

• Comme $u \mapsto \frac{1}{uln(u)}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$ alors $\sum \frac{1}{nln(n)}$ est de même nature que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{uln(u)}dt$ par le théorème de comparaison série-intégrale.
Mais pour $A > 2$ : $\int_2^A \frac{1}{uln(u)}dt = [ln(ln(u))]_2^A = ln(ln(A)) - ln(ln(2)) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{uln(u)}dt$ est divergente et donc $\sum \frac{1}{nln(n)}$ est divergente.

• Finalement $\sum ||u_n||_\infty$ est divergente et $\boxed{\sum u_n \text{ ne converge pas normalement vers } S \text{ sur } D.}$

3) a) • Comme la relation demandée est évidente si $x = 1$, alors on considère $x > 1$ et on a alors les $u_k(x)$ qui sont positifs.
$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{ln(k)} ln(x)\frac{1}{x^k}$
On utilise : $\frac{1}{ln(k)} \leq \frac{1}{ln(n+1)}$ et on a : $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \frac{ln(x)}{ln(n+1)} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (\frac{1}{x})^k$
Somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{x} \in ]0,1[$
$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \frac{ln(x)}{ln(n+1)} \frac{1}{x^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{ln(n+1)} \underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\leq 1} \frac{ln(x)}{x-1}$

• On pose $\forall x \geq 1$ , $a(x) = ln(x) - (x-1)$, alors $a$ est dérivable et $a'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} < 0$
Donc $a$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ et $a(1) = 0$ donc $\forall x \geq 1$ , $ln(x) \leq x - 1$
Donc pour $x > 1$ : $\frac{ln(x)}{x-1} \leq 1$.

• Reporté ci-dessus on obtient : $\boxed{\forall x \in D \text{ , } \forall n \geq 2 \text{ , } \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{ln(n+1)}}$

3) b) L'inégalité du 3)a) permet de démontrer que le reste de $\sum u_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $D$, donc que $\sum u_n$ converge uniformément vers $S$ sur $D$.
Comme les $u_n$ sont continues sur $D$ et que la continuité est conservée par convergence uniforme alors : $\boxed{S \text{ est continue sur } D.}$

4) • Soit $n \geq 2$ et $A > 1$. Alors :
$\int_1^A \frac{ln(x)}{x^n} dx = [ln(x) \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}]_1^A + \int_1^A \frac{1}{(n-1)x^n} dx = ln(A) \frac{-1}{(n-1)A^{n-1}} + [\frac{-1}{(n-1)^2 x^{n-1}}]_1^A \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(n-1)^2}$

On en déduit que : $\int_1^{+\infty} |u_n(x)| \, dx = \int_1^{+\infty} u_n(x) dx$ est convergente

et $\int_1^{+\infty} u_n(x) dx = \frac{1}{ln(n)(n-1)^2} = o(\frac{1}{n^2})$

• On a donc :
$$\begin{cases} \text{les } u_n \text{ sont continue par morceaux et intégrable sur } D \\ \sum u_n \text{ converge simplement sur } D \text{ vers une fonction continue (donc continue par morceaux) sur } D \\ \sum \int_D |u_n| \text{ est convergente (Négligeable devant une série de Riemann)} \end{cases}$$
on peut donc appliquer le théorème d'intégration par terme à terme et on en déduit que :
$\boxed{S \text{ est intégrable sur } D}$ et que $\int_D S = \sum_{n \geq 2} \int_D u_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{ln(n)(n-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{ln(n+1)n^2}$ après un changement d'indice.

---

**Exercice 2**

1) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$

2) Avec les notations du 1), démontrer l'unicité de $B$.

3) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ Montrer que $\exists (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ , $M = OS$

4) Montrer l'unicité du couple ci-dessus.

---

1) $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $A$ est symétrique réelle à valeurs propres strictement positives.
Par le théorème spectral, on a alors : $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in ]0, +\infty[^n$ tels que : $A = PDP^T$ avec $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
On pose $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ et on a facilement $D = \Delta^2$
Donc $A = P\Delta^2 P^T = P\Delta\Delta P^T = (P\Delta)(\underbrace{P^T P}_{I_n})(\Delta P^T) = (P\Delta P^T)^2$

On pose $B = P\Delta P^T$ on a $A = B^2$ avec $\sqrt{\lambda_k} > 0$ et $B$ symétrique réelle, donc $B \in S_n^{++}$

Donc : $\boxed{\forall A \in S_n^{++} \ , \ \exists B \in S_n^{++} \ , \ A = B^2}$

2) Soit $C \in S_n^{++}$ vérifiant $C^2 = A$.
Comme $C$ est symétrique réelle alors $C$ est diagonalisable et donc $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\mu \in sp(C)} Ker(C - \mu I_n)$

• $X \in Ker(C - \mu I_n)$
$\Rightarrow (C - \mu I_n)X = 0 \Rightarrow (C + \mu I_n)(C - \mu I_n)X = 0 \Rightarrow (C^2 - \mu^2 I_n)X = 0 \Rightarrow (A - \mu^2 I_n)X = 0$
Donc $Ker(C - \mu I_n) \subset ker(A - \mu^2 I_n)$

• Comme cette inclusion est vraie pour tout $\mu \in sp(C)$ et que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\mu \in sp(C)} Ker(C - \mu I_n)$, on en déduit que : $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\mu \in sp(C)} Ker(A - \mu^2 I_n)$
Et donc que : $sp(A) = \{\mu^2 \ , \ \mu \in sp(C)\}$ et $\forall \lambda \in sp(A) \ , \ Ker(C - \sqrt{\lambda} I_n) = ker(A - \lambda I_n)$

• Comme $A$ et $C$ commutent $(AC = C^2C = CC^2 = CA)$ alors pour tout $\lambda \in Ker(A - \lambda I_n)$ , $Ker(A - \lambda I_n)$ est stable par $C$.
Comme $Ker(C - \sqrt{\lambda} I_n) = ker(A - \lambda I_n)$ on a $C|_{ker(A - \lambda I_n)} = \sqrt{\lambda} Id_{ker(A - \lambda I_n)}$
$C$ est donc défini de manière unique sur $ker(A - \lambda I_n)$
Comme $A$ est diagonalisable $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in sp(A)} Ker(A - \lambda I_n)$ et donc $C$ est défini de manière unique.

On en déduit $B = C$ et donc $\boxed{\text{il y a unicité de } B.}$

3) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.
• Posons $A = M^T M$ alors $A^T = (M^T M)^T = M^T (M^T)^T = M^T M = A$ donc $A$ est symétrique réelle et par application du théorème spectral on a : $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ , $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ , $A = PDP^T$ avec $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = Diag(\lambda_k)$

Soit $X_i$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_i$, alors :

$AX = \lambda_i X$
$\Rightarrow M^T M X = \lambda_i X$
$\Rightarrow X^T M^T M X = \lambda_i X^T X$
$\Rightarrow (MX)^T (MX) = \lambda_i X^T X$
$\Rightarrow ||MX||^2 = \lambda_i \, ||X||^2$
$\Rightarrow \lambda_i \geq 0$ puisque $X \neq 0$

On peut donc poser $d = Diag(\sqrt{\lambda_i})$ de telle sorte que $d^2 = D$ ("racine carrée de D")

On a alors, en insérant $PP^T = I_n$ :

$M^TM = A = Pd^2P^T = PddP^T = Pd(P^TP)dP^T = (PdP^T)(PdP^T) = S^2$ avec $S = PdP^T$

• On a, par construction, $S$ symétrique réelle (car $S^T = (PdP^T)^T = PdP^T = S$).
De plus $S$ est à valeurs propres positives vu la forme de $d$, donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$
Comme $M$ est inversible alors : $det(M) \neq 0$ donc $det(A) = det(S^2) \neq 0$ et donc $S$ est aussi inversible et on peut poser : $O = MS^{-1}$

• Vérifions que $O \in O_n(\mathbb{R})$
$O^TO = (MS^{-1})^T(MS^{-1}) = (S^{-1})^TM^TMS^{-1}$,
mais $S$ et donc $S^{-1}$ est symétrique et $M^TM = S^2$ donc
$O^TO = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$ et on a bien $O \in O_n(\mathbb{R})$

• En repartant de $O = MS^{-1}$ on a $M = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $M \in S_n^+(\mathbb{R})$

4) Soit $(O, S) \in O_n(\mathbb{R})^2 \times S_n^+(\mathbb{R})^2$ tel que $M = OS$
• Alors $M = OS \Rightarrow M^TM = (OS)^T(OS) = S^TO^TOS = SI_nS = S^2$
On a alors $S^2 = A$ avec $A = M^TM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
On note $a$ l'endomorphisme associée à $A$ et $s$ l'endomorphisme associé à $S$.
Alors $a$ et $s$ commutent de manière évidente puisque $AS = S^2S = S^3 = SS^2 = SA$.

• Soit $E_\lambda = ker(a - \lambda Id)$ un sous espace propre de $a$.
Alors comme $a$ et $s$ commutent on a $E_\lambda$ qui est stable par $s$.
La restriction de $s$ à $E_\lambda$ reste autoadjointe et donc $s$ est diagonalisable sur $E_\lambda$.
Soit $\mu$ une valeur propre de $s|_{E_\lambda}$, alors $s|_{E_\lambda}^2 = a|_{E_\lambda} \Rightarrow \mu^2 = \lambda$ et comme $\lambda$ et $\mu$ sont strictement positives on a : $\mu = \sqrt{\lambda}$
$s|_{E_\lambda}$ est donc diagonalisable sur $E_\lambda$ avec une seule valeur propre possible : donc $s|_{E_\lambda} = \sqrt{\lambda}Id|_{E_\lambda}$
Finalement $s$ est définie de manière unique sur tous les sous-espaces propres de $a$, ceux-ci formant une décomosition en somme directe de l'espace totale on a $s$ qui est définie de manière unique.
On a donc l'unicité de $S$.
Comme $O = MS^{-1}$ alors $O$ est elle aussi unique et on a terminé la démonstration.

---

**Planche 7. ccINP (Kieran Pinot-Bigeard)**

**Exercice 1**

On pose : $\forall k \in \mathbb{N}$ , $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $I_{k,n} = \int\limits_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$

1) Montrer l'existence des $I_{k,n}$

2) Calculer les $I_{k,n}$

3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$

4) a) Nature de $\sum a_n e^n$

4) b) Nature de $\sum a_n (-e)^n$

4) c) Domaine de définition de $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

---

1) $t \mapsto t^k e^{-nt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et comme $n \geq 1$ alors :
$\frac{t^k e^{-nt}}{e^{-t/2}} = t^k exp(\underbrace{(-n + 1/2)}_{\leq 0} t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $t^k e^{-nt} = o(e^{-t/2})$ au voisinage de $+\infty$

Comme $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ alors, par négligeabilité, $t \mapsto t^k e^{-nt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\boxed{I_{n,k} \text{ est convergente.}}$

2) • Intégrons par parties $I_{n,k}$
L'existence des limites en $+\infty$ du crochet qui sont nulles assurent la validité de l'intégration par parties suivante : $I_{n,k} = [\frac{t^{k+1}}{k+1} e^{-nt}]_0^{+\infty} + n \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1} e^{-nt} dt \Leftrightarrow I_{n,k+1} = \frac{k+1}{n} I_{n,k+1}$

• $I_{n,0} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-nt} dt = [-\frac{e^{-nt}}{n}]_0^{+\infty} = \frac{1}{n}$

• Par récurrence on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}* \text{ , } \forall k \in \mathbb{N} \text{ , } I_{n,k} = \frac{k!}{n^{k+1}}}$

3) Pour $x \neq 0$ on pose $u_n(x) = a_n x^n$ et on a :
$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+2}} \frac{n^{n+1}}{n!} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = (\frac{n}{n+1})^{n+1} |x| = exp\Big((n+1) \underbrace{ln(1 - \frac{1}{n+1})}_{\frac{-1}{n+1} + o(\frac{1}{n+1})}\Big) |x| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{|x|}{e}$

Donc, par la règle de D'Alembert pour les séries : $\begin{cases} |x| < e \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ convergente} \\ |x| > e \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ divergente} \end{cases}$

On en déduit que : $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum a_n x^n \text{ vaut } R = e}$

4) a) Par la formule de Stirling : $a_n e^n \sim \frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}{n^{n+1}} e^n \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}} > 0$

Mais $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, donc par équivalent, pour les séries à termes positifs : $\boxed{\sum a_n e^n \text{ est divergente.}}$

4) b) Posons $A_n = a_n e^n$, alors (calcul fait au 3) : $\frac{A_{n+1}}{A_n} = (\frac{n}{n+1})^{n+1} e$
$\frac{A_{n+1}}{A_n} \leq 1 \Leftrightarrow (\frac{n}{n+1})^{n+1} e \leq 1 \Leftrightarrow (n+1)ln(1-\frac{1}{n+1}) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow ln(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{n+1} \leq 0$
Dernière inégalité vraie et montrer pas mal de fois ...

On a donc $(A_n)$ décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$, donc par le théorème spécial $\sum(-1)^n A_n$ est convergente.

• Conclusion : $\boxed{\sum(-1)^n a_n e^n \text{ est convergente.}}$

4) c) Avec les questions précédentes : $\boxed{\text{le domaine de définition de } S \text{ est } [-e, e[}$

---

**Exercice 2**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :
$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \ , \ P(X=k \cap Y=n) = \begin{cases} \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Déterminer la loi de $Y$, son espérance et sa variance.

2) Déterminer le $DSE_0$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

3) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in ]-1,1[ \ , \ \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$

4) Déterminer la loi de $X$.

5) Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elle indépendantes ?

---

1) Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(X=k)_{k\in\mathbb{N}}$ associé à $X$ : $\forall n \in \mathbb{N}$
$P(Y=n)$
$= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X=k \cap Y=n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}p(1-p)^n = \frac{1}{2^n}p(1-p)^n \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \frac{1}{2^n}p(1-p)^n(1+1)^n = p(1-p)^n$

On remarque que : $\boxed{Y+1 \text{ vérifie une loi géométrique de paramètre } p.}$
On a donc $E(Y+1) = \frac{1}{p}$ donc par linéarité de l'espérance $E(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$
et $V(Y+1) = V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$
Donc $\boxed{E(Y) = \frac{1-p}{p} \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$

2) D'après le cours : $\boxed{\forall x \in ]-1,1[\ ,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n}$

3) On sait qu'une série entière est $C^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence et que l'on peut la dériver terme à terme autant de fois que l'on veut.
A parir de la formule du 2) on obtient : $\forall k \in \mathbb{N}$

$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^k}{dx^k}(x^n)$

$\Rightarrow \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$

$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k}$

$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$

$\Rightarrow \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$

On a donc : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in ]-1,1[\ ,\ \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n}$

4) Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(Y=n)_{n\in\mathbb{N}}$ associé à $Y$ : $\forall k \in \mathbb{N}$
$P(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=k \cap Y=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} p(1-p)^n = p \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1-p}{2}\right)^n$
On utilise alors le 3) et on obtient : $P(X=k) = p\frac{(\frac{1-p}{2})^k}{(1-\frac{1-p}{2})^{k+1}} = p\frac{(1-p)^k}{2^k}\frac{2^{k+1}}{(1+p)^{k+1}} = \frac{2p}{1+p}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k$
Mais $1 - \frac{1-p}{1+p} = \frac{1+p-1+p}{1+p} = \frac{2p}{1+p}$

On remarque que : $\boxed{X+1 \text{ vérifie une loi géométrique de paramètre } \frac{2p}{1+p}.}$

5) Vu les lois de $X$ et $Y$ : $P(X=2) \neq 0$, $P(Y=0) \neq 0$ ; Par contre, on a $P(X = 2 \cap Y = 0 = 0$ facilement, donc $P(X = 2 \cap Y = 0 \neq P(X=2)P(Y=0)$ et donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

---

**Planche 8. ccINP (Antoine Lafaye et Alexandre Gorsse)**
**(déjà posé en 2023 - les 2 exos)**

**Exercice 1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

1) Justifier que $A$ admet un vecteur propre unitaire $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

On pose $B = \begin{pmatrix} A & XX^T \\ XX^T & A \end{pmatrix}$

2) Soit $Y_a = \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$

Trouver les valeurs de $a$ pour lesquels $Y_a$ est un vecteur propre de $B$.

3) Justifier que $B$ est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de $B$.

4) Application avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

---

1) $A$ est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, diagonalisable et donc admet au moins un vecteur propre que l'on peut normer.
Conclusion : $\boxed{A \text{ admet un vecteur propre unitaire } X.}$

2) • Comme $X$ est un vecteur propre de $A$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ , $AX = \lambda X$
$BY_a = \begin{pmatrix} AX + XX^T(aX) \\ XX^TX + A(aX) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X + (aX^TX)X \\ X(X^TX) + a\lambda X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + aX^TX)X \\ (X^TX + a\lambda)X \end{pmatrix}$
Comme $X$ est unitaire alors $X^TX = 1$ et donc $BY_a = \begin{pmatrix} (\lambda + a)X \\ (1 + a\lambda)X \end{pmatrix}$

• Alors $BY_a = (\lambda + a)Y_a \Leftrightarrow (1 + a\lambda) = (\lambda + a)a \Leftrightarrow a^2 = 1$

$\boxed{Y_a \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } \lambda + a \text{ si et seulement si } (a = 1 \text{ ou } a = -1)}$

3) • $B$ est symétrique réelle donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$

• $A$ est diagonalisable dans une base orthonormée que l'on peut écrire $(X, X_2, \ldots, X_n)$
Remarque : on pose alors $X_1 = X$ et on on a $\exists(\lambda_1 = \lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]$ , $AX_k = \lambda_k X_k$

On a déjà trouvé deux vecteurs propres de $B$ : $Y_1^+ = \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ et $Y_1^- = \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$

Sur le même modèle posons : $\forall k \in [\![2, n]\!]$ , $Y_k^- = \begin{pmatrix} X_k \\ -X_k \end{pmatrix}$ et $Y_k^+ = \begin{pmatrix} X_k \\ X_k \end{pmatrix}$

Alors $BY_k^+ = \begin{pmatrix} AX_k + X_1X_1^TX_k \\ X_1X_1^TX_k + AX_k \end{pmatrix}$

Mais la base choisie est orthonormée donc $X_1^TX_k = 0$ et donc $BY_k^+ = \begin{pmatrix} \lambda_kX_k \\ \lambda_kX_k \end{pmatrix} = \lambda_kY_k^+$

De même $BY_k^- = \begin{pmatrix} AX_k - X_1X_1^TX_k \\ X_1X_1^TX_k - AX_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_kX_k \\ -\lambda_kX_k \end{pmatrix} = \lambda_kY_k^-$

• Montrons maintenant que $C = (Y_1^+, \dots, Y_n^+, Y_1^-, \dots, Y_n^-)$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$

Soit $(c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que : $\sum\limits_{k=1}^{n} c_kY_k^+ \sum\limits_{k=1}^{n} d_kY_k^- = 0_{\mathbb{R}^{2n}}$

Alors : $\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n}(c_k+d_k)X_k = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n}(c_k-d_k)X_k = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} 2c_kX_k = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} 2d_kX_k = 0 \end{cases}$

(En ajoutant ou en soustrayant les deux premières égalités)
Comme $(X_1, \dots, X_n)$ est une base, on a alors : $\forall k \in [\![1, n]\!]$ , $c_k = d_k = 0$
Donc $C$ est libre et comme $card(C) = dim(\mathbb{R}^{2n})$ alors $C$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$
et $\boxed{C \text{ est une base de vecteurs propres de } B}$

4) Avec les valeurs données on obtient : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre 0.

$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre 0.

Et la matrice de passage permettant de diagonaliser $B$ : $P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & -2\sqrt{2} & 1 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

et on a aussi $P^TBP = diag(1, 0, 0, 0, 0, 0)$

---

**Exercice 2**

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{cos(nx)}{n^3+x^2}$

1) Donner la définition de la norme infinie.

2) Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

---

1) cf cours

2) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{cos(nx)}{n^3+x^2} \end{array}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$ , $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$
Comme $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, alors, par comparaison $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$

3) • Les fonctions $f_n$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ , $f_n'(x) = \frac{-nsin(nx)}{n^3+x^2} - \frac{-2xcos(nx)}{(n^3+x^2)^2}$

• Soit $A > 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $\forall x \in [-A, A]$ , $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2A}{n^3}$
Alors $||f_n'||_\infty^{[-A,A]} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2A}{n^3}$
Comme $\sum \frac{1}{n^2} + \frac{2A}{n^3}$ est convergente comme somme deux séries de Riemann convergentes, alors, par comparaison $\sum ||f_n'||_\infty^{[-A,A]}$ est convergente et donc $\sum f_n'$ est normalement convergente sur $[-A, A]$, et donc uniformément convergente sur $[-A, A]$

• On a donc : $\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } [-A, A] \\ \sum f_n \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } [-A, A](1)) \\ \sum f_n' \text{ converge uniformément sur } [-A, A] \end{cases}$
Donc par le théorème de dérivation des séries de fonctions, on en déduit que $f$ est de classe $C^1$ sur $[-A, A]$.

Comme la continuité est une notion locale et que : $\bigcup\limits_{A>0} [-A, A] = \mathbb{R}$ on a alors : $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

---

## Planche 9. ccINP (Bonfanti Matéo)

### Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ On définit la suite $(a_n)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ (4n+2)a_{n+1} = (n+1)a_n$

2) Déterminer le rayon de convergence $R$ de $f$.

3) Montrer que $f$ vérifie l'équation différentielle : $x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) = -2$ sur $]-R, R[$

4) Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{\sqrt{4-x}}{x^{3/2}}$ sur $]0, 4[$

5) En déduire l'expression de $f$ sur $]0, 4[$.
On pourra chercher $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}$ tels que : $\frac{x+2}{x(4-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{4-x}$

6) Déterminer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$

---

1) $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_{n+1} = \frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)}a_n = \frac{n+1}{4n+2}a_n$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ (4n+2)a_{n+1} = (n+1)a_n}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 0$
Avec le 1) : $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{n+1}{4n+2}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|x|}{4}$

On a donc d'après D'Alembert : $\begin{cases} |x| < 4 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| < 1 \Rightarrow \sum a_n x^n \text{ convergente} \\ |x| > 4 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| > 1 \Rightarrow \sum a_n x^n \text{ divergente} \end{cases}$

On en déduit $\boxed{R = 4}$

3) Pour $x \in ]-R, R[$ et $n \in \mathbb{N}$ on a, avec 1) : $4na_{n+1}x^{n+1} + 2a_{n+1}x^{n+1} = na_nx^{n+1} + a_nx^{n+1}$
Comme toute les séries sont des séries entières de rayon de convergence $R$, on peut sommer et on a : $4x\sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_{n+1}x^n + 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = x^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n-1} + x\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$
$\Rightarrow 4x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = x^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n-1} + x\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$
Comme on sait que $f$ est dérivable terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence (série entière) : $\forall x \in ]-R, R[\ ,\ f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$
Avec la dernière égalité : $4xf'(x) - 2(f(x) - a_0) = x^2f'(x) + xf(x)$
et comme $a_0 = 1$ on a : $\boxed{f \text{ est solution sur } ]-R, R[ \text{ de } x(4-x)f'(x) - (2+x)f(x) = -2}$

4) On travaille sur $]0,4[$
$\int \frac{\sqrt{4-x}}{x^{3/2}}dx$ intégration par partie, on primitive $x \mapsto \frac{1}{x^{3/2}}$ en $x \mapsto \frac{-2}{\sqrt{x}}$
$= [\frac{-2}{\sqrt{x}}\sqrt{4-x}] - \int [\frac{-2}{\sqrt{x}}][\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}]dx$
$= \frac{-2}{\sqrt{x}}\sqrt{4-x} - 2\int [\frac{1}{\sqrt{4-x}}][\frac{1}{2\sqrt{x}}dx]$ changement de variable $u = \sqrt{x}$ donc $du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
$= \frac{-2}{\sqrt{x}}\sqrt{4-x} - 2\int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}du$
$= \frac{-2}{\sqrt{x}}\sqrt{4-x} - 2arcsin(\frac{u}{2})$
$= \frac{-2}{\sqrt{x}}\sqrt{4-x} - 2arcsin(\frac{\sqrt{x}}{2})$

On a donc : $\boxed{\text{sur } [0,4] : \int \frac{\sqrt{4-x}}{x^{3/2}}dx = \frac{-2}{\sqrt{x}}\sqrt{4-x} - 2arcsin(\frac{\sqrt{x}}{2})}$

5) • Notons $E$ l'équation différentielle du 3) et $E_0$ l'équation homogène associée.
Alors, sur $]0,4[$ : $E_0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2+x}{x(4-x)}f(x)$

$\int \frac{2+x}{x(4-x)}dx = \int (\frac{1}{2x} + \frac{3}{2(4-x)}]dx$ donc d'après le cours :
$E_0 \Leftrightarrow f(x) = aexp(\frac{1}{2}ln(x) - \frac{3}{2}ln(4-x)) = a\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}$ avec $a \in \mathbb{R}$

• On cherche maintenant à résoudre $E$ sur $]0,4[$ en utilisant la méthode variation de la constante.
On cherche $f$ sous la forme $f(x) = \lambda(x)\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}$, changement de fonction inconnue licite car $\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}} \neq 0$ sur $]0,4[$

Alors : $f'(x) = \lambda'(x)\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}} + \lambda(x)\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}`\right)$
Donc $f$ solution de $(E)$
$\Leftrightarrow x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) = -2$
$\Leftrightarrow x(4-x)\lambda'(x)\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}} = -2$
$\Leftrightarrow \lambda'(x) = -2\frac{\sqrt{4-x}}{x^{3/2}}$ on utilise le 4)
$\Leftrightarrow \lambda(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}\sqrt{4-x} + 4arcsin(\frac{\sqrt{x}}{2}) + a$ avec $a \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{4-x} + \frac{4\sqrt{x}arcsin(\frac{\sqrt{x}}{2})}{(4-x)^{3/2}} + a\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}$

Au voisinage de 0 : $f(x) = (1 - \frac{x}{4} + (x)) + \frac{2x}{4} + o(x) + a\sqrt{x}$
Comme $f$ est $C^1$ au voisinage de 0, il n'y a pas le terme en $a\sqrt{x}$ donc $a = 0$

Donc $\boxed{\forall x \in ]0,4[\ ,\ f(x) = \frac{4}{4-x} + \frac{4\sqrt{x}arcsin(\frac{\sqrt{x}}{2})}{(4-x)^{3/2}}}$

6) On a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = f(1) = \frac{4}{3} + \frac{4arcsin(\frac{1}{2})}{3^{3/2}} = \frac{4}{3} + \frac{4\frac{\pi}{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$

On a donc : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{4}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}}$

Remarque : valeur surprenante mais juste :-)

**Exercice 2**

soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$ , $\varphi(M) = tr(AM)I_n$

1) Calculer $\varphi^2$ en fonction de $\varphi$

2) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'endomorphisme $\varphi$ soit diagonalisable.

---

1) $\varphi(\varphi(M))$
$= \varphi(tr(AM)I_n) = tr(AM)\varphi(I_n) = tr(AM)(tr(AI_n)I_n) = tr(A)tr(AM)I_n = tr(A)\varphi(M)$
On a donc : $\boxed{\varphi^2 = tr(A)\varphi}$

2) • Si $tr(A) \neq 0$ alors $X^2 - tr(A)X = X(X - tr(A))$ est un polynôme annulateur scindé simple de $\varphi$, donc $\varphi$ est diagonalisable.

• Si $tr(A) = 0$ alors $\varphi^2 = 0$ et donc 0 est la seule valeur propre de $\varphi$.
Donc, si $\varphi$ est diagonalisable alors $\varphi$ est nulle.
Comme pour $A \neq 0$ il existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $tr(AM) \neq 0$ alors $\varphi$ nulle implique $A$ est nulle.

Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable si et seulement si } tr(A) \neq 0 \text{ ou } A \text{ est nulle.}}$

---

**Planche 10. ccINP (Grisard Jade)**

**Exercice 1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A$ est inversible $\Leftrightarrow 0 \notin sp(A)$

2) Calculer le rang de $B$ en fonction de $n$ et du rang de $A$.

3) Exprimer le polynôme caractéristique de $B$ en fonction de celui de $A$.

4) Montrer que : $x^2 \in sp(A) \Leftrightarrow x \in sp(B)$

5) Montre que si $A$ est inversible avec $n$ valeurs propres distinctes, alors $B$ est diagonalisable.

---

**Exercice 2**
ne se rappelle plus ...

---

1) $A$ inversible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \chi_A(0) = (-1)^n det(A) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \notin sp(A)$

2) Si on note $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, alors les colonnes $n+1$, $2n$ de $B$ engendre un sous espace vectoriel $F \subset vect(e_1, \ldots, e_n)$ et les colonnes $n+1$, $n$ de $B$ engendre le sous espace vectoriel $G = vect(e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$
On a alors $Im(B) = F \oplus G$ et donc $rg(B) = dim(F) + dim(G) = rg(A) + n$

On a donc : $\boxed{rg(B) = rg(A) + n}$

3) $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -I_n & XI_n \end{vmatrix}$ On effectue $C_{n+k} \longleftarrow C_{n+k} + XC_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$
$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & X^2I_n - A \\ -I_n & 0_n \end{vmatrix}$ On effectue $C_{n+k} \longleftrightarrow C_{n+k}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$
$\chi_B(X) = (-1)^n \begin{vmatrix} X^2I_n - A & XI_n \\ 0_n & -I_n \end{vmatrix} = (-1)^n(-1)^{\chi}_A(X^2)$ par blocs puisque $det(-I_n) = (-1)^n$

On a donc : $\boxed{\chi_B(X) = \chi_A(X^2)}$

4) $x^2 \in sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(x^2) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{3)} \chi_B(x) = 0 \Leftrightarrow x \in sp(B)$

5) Si $A$ est inversible avec $n$ valeurs propres distinctes, on sait alors que $A$ est diagonalisable et qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (R\backslash\{0\})^n$ avec les $\lambda_i$ distincts deux à deux tel que $A$ soit semblable à $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
On a ainsi que le polynôme caractéristique de $A$ s'écrit : $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$
Comme on est dans $\mathbb{C}$, on peut choisir, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ , $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_k^2 = \lambda_k$
Avec la relation du 3) on obtient :
$\chi_B(X) = \chi_A(X^2) = \prod_{k=1}^{n} (X^2 - \lambda_k) = \prod_{k=1}^{n} (X^2 - \mu_k^2) = \prod_{k=1}^{n} (X - \mu_k)(X + \mu_k)$
Comme $\mu_k$ est non nul (car $\lambda_k \neq 0$) alors $\mu_k \neq -\mu_k$ et comme les $\lambda_k$ sont distincts deux à deux alors finalement $\chi_B(X)$ est scindé simple donc, d'après le cours : $\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$

Remarque : autre méthode, avec les mêmes notations.
On a il existe une base $B_A = (X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que : $\forall k \in [\![1, k]\!]$ , $AX_k = \lambda_k X_k$ et $\lambda_k \neq 0$

On pose alors : $\forall k \in [\![1, n]\!]$ , $Y_k^+ = \begin{pmatrix} \mu_k X_k \\ X_k \end{pmatrix}$ et $Y_k^- = \begin{pmatrix} -\mu_k X_k \\ X_k \end{pmatrix}$
Alors $BY_k^+ = \begin{pmatrix} AX_k \\ \mu_k X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_k X_k \\ \mu_k X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_k^2 X_k \\ \mu_k X_k \end{pmatrix} = \mu_k \begin{pmatrix} \mu_k X_k \\ X_k \end{pmatrix}$

On a donc : $BY_k^+ = \mu_k BY_k^+$ et de même $BY_k^- = -\mu_k BY_k^+$
Posons $B_B = (Y_1^+, \ldots, Y_n^+, Y_1^-, \ldots, Y_n^-)$
$B_B$ est alors une famille de vecteurs propres de $\mathbb{R}^{2n}$

Soit $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^{2n}$ tel que : $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_kY_k^+b_kY_k^-)=0$

On a alors, en regardant par blocs : $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-b_k)\mu_kX_k=0$ et $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)X_k=0$

Comme $B_A$ est une base, on a $\forall k\in[\![1,n]\!]$ , $\begin{cases}(a_k-b_k)\mu_k=0\\ a_k+b_k=0\end{cases}$ et comme $\mu_k\neq 0$ :

$\forall k\in[\![1,n]\!]$ , $\begin{cases}a_k-b_k=0\\ a_k+b_k=0\end{cases}$

On en déduit : $\forall k\in[\![1,n]\!]$ , $a_k=b_k=0$ et donc $B_B$ libre.
Comme on a le bon nombre de vecteurs alors $B_B$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$

On a une base formée de vecteurs propres de $B$ donc : $\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$

---

**Planche 11. ccINP (SHEIHOSSEN Maxime)**

**Exercice 1**

Soit $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}ln(n)x^n$ et $g(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}ln(1-\frac{1}{n})x^n$

1) Déterminer les rayons de convergences de $f$ et de $g$.

2) Montrer que $g$ est continue sur $[-1,1[$

3) Etablir une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.

4) Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en $-1$.

5) Equivalents de $f$ et de $g$ en $-1$.

---

1) • Notons $R_f$ le rayon de convergence de $f$.
Alors, si $x=1$, $\sum ln(n)x^n=\sum ln(n)$ est grossièrement divergente et donc $R_f\leq 1$
De plus, si $|x|<1$ alors $ln(n)x^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et donc $R_f\geq |x|$, et même $R_f\geq 1$
On a donc $R_f=1$

• $\left|ln(1-\frac{1}{n}\right|\sim\left|\frac{-1}{n}\right|=\frac{1}{n}$, donc, par règle de l'équivalent, $g$ a même rayon de convergence que $\sum\frac{x^n}{n}$ dont on connaît le rayon de convergence d'après le cours. Donc $g$ admet 1 comme rayon de convergence.

$\boxed{f \text{ et } g \text{ ont pour rayon de convergence 1.}}$

2) • Comme $g$ est une série entière, on sait que $g$ est continue sur son intervalle ouvert de convergence donc sur $]-1,1[$
Il reste le problème en $-1$.

Posons $J=[-1,\frac{-1}{2}]$ et $\forall n\geq 2$ , $\forall x\in J$ , $g_n(x)=ln(1-\frac{1}{n})x^n$

Alors $g_n(x)=\underbrace{ln(1-\dfrac{1}{n})}_{\leq 0}(-1)^n\left|x\right|^n$, la série $\sum g_n(x)$ est donc alternée.

De plus $|g_n(x)|=|x|^n\,(-ln(1-\frac{1}{n}))$
Mais $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{n}$ et $t\mapsto -ln(1-t)$ croissante sur $J$ car $\frac{d}{dt}(-ln(1-t))=\frac{1}{1-t}\geq 0$,
donc $-ln(1-\frac{1}{n+1})\leq -ln(1-\frac{1}{n})$
$\Rightarrow -ln(1-\frac{1}{n+1})\,|x|^n\leq -ln(1-\frac{1}{n})\,|x|^n$ et comme $|x|\leq 1$
$\Rightarrow -ln(1-\frac{1}{n+1})\,|x|^{n+1}\leq -ln(1-\frac{1}{n})\,|x|^n$
$\Rightarrow |g_{n+1}(x)|\leq|g_n(x)|$
La suite $(|g_n(x)|)$ est donc décroissante.

On a de manière directe : $|g_n(x)|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$

Donc par le critère des séries alternée $\sum\limits_{n\geq 2}g_n(x)$ converge simplement vers $g$ sur $J$ (on vient en particulier de montrer la convergence en $x=-1$)

• De plus, toujours par le théorème spécial : $\forall x\in J$
$\left|g(x)-\sum\limits_{n=2}^{N}g_n(x)\right|\leq|g_{N+1}(x)|\leq|x|^{N+1}\,(-ln(1-\frac{1}{N+1})\leq -ln(1-\frac{1}{N+1})\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$

On en déduit que $\sum g_n$ converge uniformément vers $g$ sur $J$. Comme les fonctions $g_n$ sont continues sur $J$ alors on en déduit que : $g$ est continue sur $J$ (et en particulier en $-1$)

• On a bien montrer que : $\boxed{g \text{ est continue sur } [-1,1[}$

3) $\forall x\in]-1,1[$ , $g(x)$
$=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}ln(1-\frac{1}{n})x^n$
$=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}[ln(n-1)-ln(n)]x^n$ les séries ont même rayon de convergence
$=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}ln(n-1)x^n-\sum\limits_{n=2}^{+\infty}ln(n)x^n$ changement d'indice première somme
$=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}ln(n)x^{n+1}-f(x)$ premier terme nul
$=x\sum\limits_{n=2}^{+\infty}ln(n)x^n-f(x)$
=xf(x) - f(x)

On a donc : $\boxed{\forall x\in]-1,1[\ ,\ (1-x)f(x)=-g(x)}$

4) • $g$ est continue en $-1$ donc $\lim\limits_{x\to-1}g(x)=g(-1)$
Mais $g_2(-1)=ln(1-1/2)(-1)^2=-ln(2)$ et $g_3(-1)=ln(1-1/3)(-1)^3=-ln(2/3)=ln(3)-ln(2)$

Par le théorème sur les séries alternées $g(-1)$ est compris entre deux termes consécutifs de ses sommes partielles, donc :
$-ln(2) \leq g(-1) \leq (-ln(2)) + (-ln(2) + ln(3)) = ln(3) - 2ln(2) = ln(3/4) < 0$
On en déduit $g(-1) < 0$ et donc $\boxed{g(x) \underset{x \to -1^+}{\sim} g(-1)}$

- Avec la relation du 3) : $\boxed{f(x) = \frac{-g(x)}{1-x} \underset{x \to -1^+}{\sim} \frac{-g(-1)}{2}}$

---

**Exercice 2**

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $M^3 = I_n$, $MM^T = M^TM$ et $M \neq I_n$

1) Montrer que $M^TM$ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer son spectre.

2) Montrer que $M$ est une matrice orthogonale.

3) Si $n = 3$ étudier $M$

---

1) $(M^TM)^T = M^T(M^T)^T = M^TM$ donc $M^TM$ est symétrique réelle et donc, par le théorème spectral $\boxed{M^TM \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{R}).}$

Comme $M$ et $M^T$ commutent et que $M^3 = I_3$, alors $(M^TM)^3 = (M^3)^TM^3 = I_3$ donc $X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de $M^TM$, donc $sp(M^TM) \subset \{$ Racine réelle de $X^3 - 1\} = \{1\}$

Comme $M^TM$ est diagonalisable alors $sp(M^TM) \neq \emptyset$ et donc $\boxed{sp(M^TM) = \{1\}}$

2) Comme $M^TM$ est diagonalisable et que son spectre vaut $\{1\}$ alors $M^TM = I_n$ et donc $\boxed{M \text{ est une matrice orthogonale.}}$

3) $det(M) = \pm 1$ et $det(M^3) = det(I_3) = 1$ donc $det(M) = 1$ (la valeur $-1$ est impossible) et donc $M$ est une matrice de rotation (puisque $M \neq I_3$)
Comme $M^3 = I_3$, l'angle $\theta$ vérifie $3\theta = 2k\pi$ et donc $\boxed{M \text{ est une matrice de rotation d'angle } \pm\frac{2\pi}{3}}$

## Planche 12. ccINP (SAUVAITRE Sidonie)

### Exercice 1

Soit $\varphi$ une application qui a un polynôme $P$ de $\mathbb{R}_3[X]$ associe $\varphi(P)$ le reste de la division euclidienne de $X^2P$ par $X^4-1$.

1. Justifier que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de $\varphi$ dans la base canonique qui sera notée $A$.
3. Démontrer que $\varphi$ est diagonalisable.
4. Déterminer les valeurs propres de $\varphi$.
5. Déterminer les sous espaces propres de $\varphi$.
6. Est-ce que $A$ est inversible ? Le cas échéant exprimer $A^{-1}$.
7. L'endomorphisme $\varphi$ est-il un automorphisme ?

---

1.) Soit $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors par définition de la division euclidienne :

$$\exists!(T_P, T_Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \ , \ \exists!(\varphi(P), \varphi(Q)) \in \mathbb{R}_3[X]^2 \begin{cases} X^2P = T_P(X^4-1) + \varphi(P) \\ X^2Q = T_Q(X^4-1) + \varphi(Q) \end{cases}$$

Ce qui définit clairement l'application $\varphi$.
On a alors : $X^2(P+\lambda Q) = (T_P + \lambda T_Q)(X^4-1) + \underbrace{\varphi(P) + \lambda\varphi(Q)}_{\in \mathbb{R}_3[X]}$
Par unicité de la division euclidienne on a alors : $\varphi(P+\lambda Q) = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$

$\boxed{\varphi \text{ est donc un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X]}$

2.) $1.X^2 = 0(X^4-1) + X^2$ donc $\varphi(1) = X^2$
$X.X^2 = X^3 = 0(X^4-1) + X^3$ donc $\varphi(X) = X^3$
$X^2.X^2 = X^4 = 1(X^4-1) + 1$ donc $\varphi(X^2) = 1$
$X^3.X^2 = X^5 = X(X^4-1) + X$ donc $\varphi(X^3) = X$

Donc $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

3.) $A$ est symétrique réelle donc $A$ est diagonalisable donc $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable.}}$
4.) $A^2 = I_4$ donc $\varphi$ est une symétrie (donc $\varphi$ est diagonalisable) et donc $\boxed{sp(\varphi) = \{-1, 1\}}$
5.) Après calculs : $\boxed{E_1(\varphi) = vect(1+X^2, X+X^3) \text{ et } E_{-1}(\varphi) = vect(1-X^2, X-X^3)}$
6.) $A^2 = I_4$ donc $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = A}$
7.) $A$ est inversible donc $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme.}}$

**Exercice 2**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie par
$\forall x \geq 0, f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$
$\forall x \leq 0, f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

---

1.) Si $x = 0$ : $f_n(x) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$
Si $x > 0$ : $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx^2}{nx} = x$
Si $x < 0$ : $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx^3}{nx^2} = x$
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0x$

$\boxed{(f_n) \text{ converge simplement vers } f : x \mapsto x \text{ sur } \mathbb{R}}$

2.) Pour $x \geq 0$ , $f_n(x) - f(x) = \frac{nx^2}{1+nx} - x = \frac{-x}{1+nx}$ donc
$|f_n(x)| = \frac{x}{1+nx} \leq \frac{x}{nx} \leq \frac{1}{n}$ (valable en $x = 0$)

Pour $x < 0$ , $f_n(x) - f(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2} - x = \frac{-x}{1+nx^2}$
On pose $\forall x < 0$ , $h_n(x) = \frac{-x}{1+nx^2}$
$h_n$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $h_n'(x) = \frac{-(1+nx^2)-2nx(-x)}{(1+nx^2)^2} = \frac{nx^2-1}{(1+nx^2)^2}$
$h_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{n}}$ et $h_n(\frac{-1}{\sqrt{n}}) = \frac{-\frac{-1}{\sqrt{n}}}{1+n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

On a donc les variations suivantes :

| $t$ | $-\infty$ | | $\frac{-1}{\sqrt{n}}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h_n'(t)$ | | $+$ | $0$ | - | |
| $h_n(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ | $\searrow$ | $0$ |

Comme on a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ (à partir d'un certain rang) alors :
$||f_n - f||_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\boxed{f_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$

## Planche 13. ccINP (VALOT Alexandre)

### Exercice 1

On pose $f(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

1) Montrer que $f$ est définie sur $]0,+\infty[$
2) Montrer que $f$ est continue sur $]0,+\infty[$
3) Montrer que : $\forall x>0\ ,\ f(x+1)=xf(x)$

Pour $n\geq 2$, on pose $v_n=\int\limits_{n-1}^{n} ln(f(u))du$ et pour $x>1$ on pose : $\Phi(x)=\int\limits_{x-1}^{x} ln(f(u))du$

4) Montrer que $\Phi$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $\Phi'$
5) En déduire la limite de $\Phi$ en $+\infty$
6) Déterminer la nature de $\sum(-1)^n v_n$
6) Déterminer la nature de $\sum(-1)^n \frac{1}{v_n}$

---

1) Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé, étudions la convergence de $f(x)$.
Comme $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ alors, il y a éventuellement problème pour l'intégrale aux bornes 0 et $+\infty$.

En 0 : $t^{x-1}e^{-t}\sim\frac{1}{t^{1-x}}>0$ donc par la règle de l'équivalent pour les intégrales de fonctions positives on a : $\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ de même nature que $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ qui est une intégrale de Riemann convergente si et seulement si $1-x<1\Leftrightarrow x>0$ Donc $\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente si et seulement si $x>0$

En $+\infty$ : $t^{x-1}e^{-t}=o(\frac{1}{t^2})$ et $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc par négligeabilité $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Donc $\int\limits_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente pour tout $x>0$

Bilan : $f(x)$ est convergente si et seulement si $x>0$ et donc $\boxed{f \text{ est définie sur } ]0,+\infty[}$

2) Posons $I=]0,+\infty[$ et $\begin{array}{cccc} F & : & I^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & t^{x-1}e^{-t}\end{array}$ , ainsi $\forall x\in I\ ,\ f(x)=\int_I F(x,t)dt$

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $I$ et $x\in[a,b]$.
$x\in[a,b]\Rightarrow a\leq x\leq b\Rightarrow a-1\leq x-1\leq b-1$

Alors $t\in]0,1[\Rightarrow ln(t)<0$ et donc $a-1\leq x-1\Rightarrow(a-1)ln(t)\geq(x-1)ln(t)$, on prend l'exponentielle qui est croissante et on a : $exp((a-1)ln(t))\geq exp((x-1)ln(t))$ donc $0\leq t^{x-1}\leq t^{a-1}$
Alors $t\in[1,+\infty[\Rightarrow ln(t)\geq 0$ et donc $x-1\leq b-1\Rightarrow(x-1)ln(t)\geq(b-1)ln(t)$, on prend l'exponentielle qui est croissante et on a : $exp((x-1)ln(t))\geq exp((b-1)ln(t))$ donc $0\leq t^{x-1}\leq t^{b-1}$

On a donc $\forall t \in I \ , \forall x \in [a,b] \ , \ \begin{cases} 0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1} \text{ si } t \in ]0,1[ \\ 0 \leq t^{x-1} \leq t^{b-1} \text{ si } t \in ]1,+\infty[ \end{cases}$
Comme $t^{a-1} \leq t^{a-1}+t^{b-1}$ et $t^{b-1} \leq t^{a-1}+t^{b-1}$ on a donc $\forall t \in I \ , \forall x \in [a,b] \ , \ 0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1}+t^{b-1}$ et en multipliant par $e^{-t} > 0$ on a : $0 \leq f(x,t) \leq e^{-t}(t^{a-1}+t^{b-1})$

Posons $\forall t \in I \ , \ \varphi(t) = e^{-t}(t^{a-1}+t^{b-1}) = f(a,t)+f(b,t)$, alors $\varphi$ est continue par morceaux sur $I$ et intégrable sur $I$ par le a) comme somme de deux fonctions intégrables.

On a donc : $\begin{cases} \forall x \in [a,b] \ , \ t \mapsto F(x,t) \text{ est continue sur } [a,b] \\ \forall t \in I \ , \ x \mapsto F(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \forall (x,t) \in [a,b] \times I \ , \ |F(x,t)| \leq \varphi(t) \text{ et } \varphi \text{ est intégrable sur } I \end{cases}$
On peut alors appliquer le théorème de continuité sous le signe somme et on a $f$ qui est continue sur $[a,b]$

Comme $I = \bigcup\limits_{[a,b]\subset I} [a,b]$ ($I$ est la réunion de ses segments), alors $\boxed{f \text{ est continue sur } I = ]0,+\infty[}$

3) Soit $\epsilon > 0$ et $A > 0$. Alors par intégration par partie avec des fonctions $C^1$ sur $[\epsilon, A]$ :
$\int\limits_{\epsilon}^{A} t^{x-1}e^{-t}dt = [\frac{t^x}{x}e^{-t}]_{\epsilon}^{A} + \int\limits_{\epsilon}^{A} \frac{t^x}{x}e^{-t}dt$
Puis comme les intégrales sont convergentes et avec les limites usuelles :

$$\underbrace{\int_{\epsilon}^{A} t^{x-1}e^{-t}dt}_{\underset{\substack{\epsilon\to 0\\ A\to+\infty}}{\longrightarrow} f(x)} = \underbrace{\frac{A^x}{x}e^{-A}}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}0} - \underbrace{\frac{\epsilon^x}{x}e^{-\epsilon}}_{\underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow}0} + \frac{1}{x}\underbrace{\int_{\epsilon}^{A} t^{x+1-1}e^{-t}dt}_{\underset{\substack{\epsilon\to 0\\ A\to+\infty}}{\longrightarrow} f(x+1)}$$

On en déduit donc : $\boxed{\forall x > 0 \ , \ f(x+1) = xf(x)}$

4) Comme $\forall u > 0 \ , \ f(u) > 0$ alors on la fonction $u \mapsto ln(f(u))$ est bien définie sur $]0,+\infty[$.
De plus, avec le 1), elle est continue sur $I$.
Notons $\psi$ une primitive sur $I$ de cette fonction, alors $\psi$ est de classe $C^1$
et $\forall x \in ]1,+\infty[ \ , \ \Psi(x) = \psi(x) - \psi(x-1)$
$\Psi$ est donc $C^1$ comme composée de fonctions $C^1$.
De plus : $\Phi'(x) = \psi'(x) - \psi'(x-1) = ln(f(x)) - ln(f(x-1)) = ln(\frac{f(x)}{f(x-1)}) = ln(x)$

Bilan : $\boxed{\Phi \text{ est dérivable sur } ]1,+\infty[ \text{ et } \forall x > 1 \ , \ \Phi'(x) = ln(x)}$

5) En intégrant la relation du 4) on a : $\exists a \in \mathbb{R}, \ \Phi(x) = xln(x) - x + a$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = +\infty}$

6) On a : $v_n = \Phi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\boxed{\sum(-1)^n v_n \text{ diverge grossièrement.}}$

7) D'après 4) : $\Phi'(x) = ln(x) \geq 0$ sur $]1,+\infty[$ donc $\Phi$ est croissante, donc comme $v_n = \Phi(n)$, $(v_n)$ est croissante, et, comme $v_n > 0$, $(\frac{1}{v_n})$ est décroissante.
De plus, avec la limite du 5) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = 0$

On a donc : $\begin{cases} \sum \frac{(-1)^n}{v_n} \text{ est alternée} \\ (\frac{1}{v_n}) \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{v_n} = 0 \end{cases}$ , donc par le théorème spécial $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{v_n} \text{ est convergente.}}$

---

**Exercice 2**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $p \in L(E)$ un projecteur.

1) Montrer que : $E = ker(p) \oplus Im(p)$

2) Montrer que : $rg(p) = tr(p)$

---

1) • $p$ est un projecteur donc $p^2 = p$ et donc $X(X-1)$ est un polynôme annulateur scindé simple de $p$ et donc $p$ est diagonalisable.
• Comme de plus les valeurs propres de $p$ sont racines de $X(X-1)$ alors $sp(p) \subset \{0, 1\}$
• Comme $p$ est diagonalisable $E$ est la somme directe des sous-espaces propres de $p$ et donc $E = ker(p - Id_E) \oplus Ker(p)$
• Soit $x \in Im(p)$, alors $\exists y \in E$ , $p(y) = x$
On compose par $p$ et on a : $p^2(y) = p(x)$ mais comme $p^2 = p$ alors :
$p(y) = p(x) \Rightarrow x = p(x) \Rightarrow (p - Id_E)(x) = 0_E \Rightarrow x \in ker(p - Id_E)$
On a donc : $Im(p) \subset ker(p - Id_E)$
• Soit $x \in ker(p - Id_E)$, alors :
$(p - Id_E)(x) = 0_E \Rightarrow x = p(x) \Rightarrow x \in Im(p)$ et donc $ker(p - Id_E) \subset Im(p)$
• Avec les deux inclusions on a : $ker(p - Id_E) = Im(p)$
• En reportant dans la somme directe précédente on a : $\boxed{Im(p) \oplus ker(p)}$

2) En écrivant le matrice de $p$ dans une base $B$ adaptée à la somme directe
$E = ker(p - Id_E) \oplus Ker(p)$ alors $p$ a une matrice de la forme : $M_B(p) = \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (par blocs) avec
$a = dim(ker(p - Id_E)) = dim(Im(p)) = rg(p)$
Comme $tr(p) = tr(M_B(p))$, on en déduit : $\boxed{tr(p) = rg(p)}$

## Planche 14. ccINP (ASSAFARI Fatima)

### Exercice 1

Soit $\alpha$ un réel.

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ \alpha & -2\alpha & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

Q1. Pour quelles valeurs de $\alpha$ $M_\alpha$ est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer le rang de $M_\alpha$.

Q3. Déterminer $P$ tel que $M_{-1} = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

On veut résoudre $A^2 = M_{-1}$.

Q4. (a) Montrer que $A^2 = M_{-1} \Leftrightarrow B^2 = \Delta$ avec $B$ à préciser.

(b) Montrer que $B^2 = \Delta \Rightarrow B$ et $\Delta$ commutent.

(c) En déduire $B$ telle que $B^2 = \Delta$.

(d) Résoudre $A^2 = M_{-1}$.

---

Q1) Polynôme caractéristique de $M_\alpha$ : $\chi_{M_\alpha}(X) = (X-1)(X-4)(X-(\alpha+1))$

$\alpha+1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$ et $\alpha + 1 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 3$

- Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 3$

alors $M_\alpha$ admet trois valeurs propres distinctes et donc $M_\alpha$ est diagonalisable.

- Si $\alpha = 0$ , $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 4 est valeur propre simple et 1 est valeur propre double.

$M_\alpha - 1.I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(x,y,z) \in ker(M_\alpha - 1.I_3) \Leftrightarrow y = 0$, on a $ker(M_\alpha - 1.I_3)$ qui est un plan.

La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 1+2=3 donc $M_\alpha$ est diagonalisable.

- Si $\alpha = 3$ , $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ , 1 est valeur propre simple et 4 est valeur propre double.

$M_\alpha - 4.I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(x,y,z) \in ker(M_\alpha - 4.I_3) \Leftrightarrow y = 0$ et $x = 0$, on a $ker(M_\alpha - 4.I_3)$ qui est une droite.

La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 1+1=2<3 donc $M_\alpha$ n'est pas diagonalisable. Bilan : $\boxed{M_\alpha \text{ diagonalisable ssi } \alpha \neq 3}$

Q2) $det(M_\alpha) = 4(\alpha+1)$ donc : $\alpha \neq -1 \Leftrightarrow det(M_\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow M_\alpha$ est inversible et son rang vaut 3.

Si $\alpha = -1$ : $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2.

Bilan : $\boxed{\text{Si } \alpha \neq -1,\ M_\alpha \text{ est de rang 3 et } M_{-1} \text{ est de rang 2}}$

Q3) Avec les méthodes de diagonalisation traditionnelle on peut choisir $\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

Q4) a) $A^2 = M_{-1} \Leftrightarrow A^2 = P\Delta P^{-1} \Leftrightarrow (P^{-1}AP)^2 = \Delta \Leftrightarrow B^2 = \Delta$

avec $\boxed{B = P^{-1}AP}$

Q4) b) Si $B^2 = \Delta$, alors $B\Delta = B.B^2 = B^3 = B^2.B = \Delta B$ et donc $\boxed{B \text{ et } \Delta \text{ commutent.}}$

Q4) c) On écrit $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Alors $B\Delta = \Delta B \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow b = c = d = f = g = h = 0$ donc $B$ est diagonale.
On écrit $B = diag(p, q, r)$.
Alors $B^2 = \Delta \Leftrightarrow diag(p^2, q^2, r^2) = diag(0, 1, 4) \Leftrightarrow \boxed{B = diag(0, \pm 1, \pm 2)}$

Q4) d) Les solutions de $A^2 = M_{-1}$ sont les matrice $\boxed{Pdiag(0, \pm 1, \pm 2)P^{-1}}$

---

**Exercice 2**

$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} sin(xt)dt$
Q1. Montrer que $\varphi$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Q2. Montrer que $\varphi$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Q3. Calculer $\varphi'(x)$ et déterminer $\varphi(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

---

Q1. Posons $I = ]0, +\infty[$ et $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-t}}{t} sin(xt) \end{array}$,
ainsi, en cas d'existence $\forall x \in \mathbb{R}$ , $\varphi(x) = \int_I f(x,t)dt$

On sait que : $\forall t \in I$ , $\forall x \in \mathbb{R}$ , $|sin(xt)| \leq |xt|$ donc $|f(x,t)| \leq \frac{e^{-t}}{t}|xt| \leq |x| e^{-t}$
Comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $I$, alors, par comparaison, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $I$ et donc $\varphi(x)$ est convergente.

On a donc : $\boxed{\varphi \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

Q2. • $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R} \times I$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = cos(xt)e^{-t}$
• $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times I$ , $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-t}$

On a donc :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ , } t \mapsto f(x,t) \text{ est continue par morceaux et intégrable sur } I (\text{cf Q1}) \\ \forall t \in I \text{ , } x \mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ , } t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \text{il existe une application } \alpha : t \mapsto e^{-t} \text{ continue par morceaux et intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \forall (x,t) \in [a,b] \times I \text{ , } \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \alpha(t) \end{cases}$$

on peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme de Leibniz et on a :

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \text{ , } \varphi'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt}$$

Q3. on continue la calcul de Q2. Donc $\forall x > 0$ :

$$\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} cos(xt)e^{-t}dt = Re\left(\int_0^{+\infty} e^{ixt-t}dt\right) = Re\left([\frac{e^{t(ix-1)}}{ix-1}]_0^{+\infty}\right) = Re\left(\frac{1}{1-ix}\right) = Re\left(\frac{1+ix}{1+x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

En intégrant on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$ , $\varphi(x) = arctan(x) + a$ avec $a \in \mathbb{R}$

Mais, de manière directe : $\varphi(0) = 0$ donc $a = 0$ et donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \text{ , } \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} sin(xt)dt = arctan(x)}$

---

**Planche 15. ccINP (DELESSALLE)**

**Exercice 1**

Soit $u$ un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que : $u^3 = -u$

1) Montrer que : $Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \subset ker(u)$

2) Montrer que : $\mathbb{R}^3 = Ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus ker(u)$

3) Montrer que 0 est la seule valeur propre de $u$.
En déduire que : $ker(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

4) En déduire qu'il existe une base $B$ de $\mathbb{R}^3$ telle la matrice de $u$ relativement à $B$ s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

1) Soit $x \in \mathbb{R}^3$.

$x \in Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3 \ , \ x = (u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})(y)$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3 \ , \ x = u^2(y) + y$ on compose par $u$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3 \ , \ u(x) = u^3(y) + u(y)$ on utilise $u^3 = -u$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3 \ , \ u(x) = -u(y) + u(y)$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3 \ , \ u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$
$\Rightarrow x \in ker(u)$

Donc $x \in Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \Rightarrow x \in ker(u)$ et donc $\boxed{Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \subset ker(u)}$

2) • $x \in ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \cap ker(u) \Rightarrow \begin{cases} u^2(x) + x = 0_{\mathbb{R}^3} \\ u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3}$

Donc $ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3} \cap ker(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et donc la somme $ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) + ker(u)$ est directe.
• Avec le 1) on a $dim(Ker(u)) \geq dim(Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}))$ donc
$dim(Ker(u)) + dim(ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) \geq dim(Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) + dim(ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) = 3$ (par le théorème du rang) On a donc $dim(Ker(u)) + dim(ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) \geq 3$ et on en déduit
$dim(Ker(u) + ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) = dim(Ker(u)) + dim(ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) = 3$ puisque la somme est directe.
Au bilan : $\boxed{\mathbb{R}^3 = Ker(u)) \oplus ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})}$

3)a) $u^3 = -u$ donc $det(u)^3 = det(-u)$. On est en dimension 3, donc $det(u)^3 = (-1)^3 det(u)$ et donc $det(u^3) = -det(u)$
Ce qui donne $det(u) = 0$ ou $det(u^2) + 1 = 0$, mais la dernière égalité est impossible car $det(u) \in \mathbb{R}$, donc $\boxed{det(u) = 0}$

3)b) Comme $det(u) = 0$ alors $u$ n'est pas bijective, donc n'est pas injective donc $\boxed{ker(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$

4) Comme $u$ n'est pas nul alors $ker(u) \neq \mathbb{R}^3$ et donc $ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
Soit donc $e_2 \in ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})$ un vecteur non nul.
D'après b), on peut choisir $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ tel que $e_1 \in ker(u)$
On pose $e_3 = u(e_2)$

Montrons que $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$
On remarque que $(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})(e_3) = u^2(e_3) + e_3 = \underbrace{u^3}_{u^3=-u}(e_2) + u(e_2) = -u(e_2) + u(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$

donc $e_3 \in ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})$

On a donc $\underbrace{ae_1}_{\in ker(u)} = \underbrace{-be_2 - ce_3}_{\in ker(u^2+Id_{\mathbb{R}^3})}$, donc, avec la somme directe du 2) : $\begin{cases} ae_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$
Comme $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ on en déduit déjà $a = 0$
En composant par $u$ : $be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow bu(e_2) + cu(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$
mais $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2$ car $e_2 \in ker(U^2 + Id_E)$ et donc $\begin{cases} be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ -ce_2 + be_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$

On fait $bL_1 - cL_2$ et on obtient : $(b^2+c^2)e_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$, comme $e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ alors $b^2+c^2=0$ et comme $b$ et $c$ sont réels alors $b=c=0$
Finalement $a=b=c=0$ et donc $B$ est libre.
Comme $card(B) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$ alors $B$ est une base de $\mathbb{R}^3$

On a $u(e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = -e_2$ donc :

$$\boxed{\text{la matrice de } u \text{ relativement à } B \text{ s'écrit : } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

---

**Exercice 2**

Notons $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1} dx$

1) Montrer l'existence de $J$.

2) Montrer que $J = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$

---

1) • Posons $I = ]0,+\infty[$ et $\begin{array}{cccc} f & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{x^2}{e^x-1} \end{array}$

Alors $f$ est continue sur $I$ et $J$ pose problème en 0 et en $+\infty$

• Au voisinage de 0 : $f(x) = \frac{x^2}{1+x+o(x)-1} = \frac{x^2}{x+o(x)} = \frac{x}{1+o(1)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $f$ est prolongeable par continuité en 0 et $f$ est intégrable sur $]0,1]$
• Au voisinage de $+\infty$ par comparaison exponentielle-puissance : $f(x) = o(\frac{1}{x^2})$.
Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ alors, par négligeabilité, $f$ est intégrable sur $[1,+\infty[$
• $f$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, donc sur $I$ et donc $\boxed{J \text{ est convergente.}}$

2) • $\forall x \in I$ , $f(x) = \frac{x^2}{e^x-1} = \frac{x^2}{e^x}\frac{1}{1-e^{-x}}$
Comme $e^{-x} \in ]0,1[$ on utilise $\frac{1}{1-u} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$ avec $u = e^{-x}$
Alors : $f(x) = \frac{x^2}{e^x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x}$

• Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$ : $\begin{array}{cccc} f_n & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 e^{-(n+1)x} \end{array}$

Par double intégration par partie justifiées par les limites en $+\infty$, on a :

$$\int_I f_n(x)dx$$
$$= \int_0^{\infty} x^2 e^{-(n+1)x} dx$$
$$= [x^2 \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}]_0^{+\infty} - \int_0^{\infty} 2x \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)} dx$$
$$= \frac{2}{n+1} \int_0^{\infty} x e^{-(n+1)x} dx$$
$$= \frac{2}{n+1} [x \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}]_0^{+\infty} - \frac{2}{n+1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)} dx$$
$$= \frac{2}{(n+1)^2} \int_0^{\infty} e^{-(n+1)x} dx = \frac{2}{(n+1)^2} [\frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}]_0^{\infty} dx = \frac{2}{(n+1)^3}$$

• On remarque que $f_n(x) \geq 0$, donc que $\int_I |f_n| = \frac{1}{(n+1)^3}$ et donc avec Riemann que $\sum \int_I |f_n|$ est convergente.

• On a donc : $\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont continues par morceaux et intégrables sur } I \\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } f \text{ qui est continue par morceaux sur } I \\ \sum \int_I |f_n| \text{ est convergente} \end{cases}$

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on retrouve l'intégrabilité de $f$ et que :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx \Rightarrow J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$$

Après changement d'indice : $\boxed{J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+^3}}$

Remarque : On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée sur la suite des sommes partielles ...

## 2 Mines télécom

### Planche 16. Mines-Télécom (Sheikossen Maxime)

---

**Exercice 1**

Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 + I_n$ ne soit pas inversible et $tr(M) = 1$

1) Montrer que : $M + iI_n$ et $M - iI_n$ ne sont pas inversibles.

2) $M$ est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ ?

---

1) $M^2 + I_n = (M + iI_n)(M - iI_n)$ donc
$M^2 + I_n$ non inversible $\Rightarrow det(M^2 + I_n) = 0 \Rightarrow det(M - iI_n) = 0$ ou $det(M + iI_n) = 0$
Mais $det(M - iI_n) = \overline{det(M + iI_n)}$ donc $det(M - iI_n) = det(M + iI_n) = 0$ et
$\boxed{M - iI_n \text{ et } M + iI_n \text{ ne sont pas inversibles.}}$

2) Avec le 1) on a que $i$ et $-i$ sont valeurs propres d'ordre au moins 1.
Comme $M$ est réelle $i$ et $-i$ ont le même ordre de multiplicité $k$, donc $2k \leq 3$ et finalement $k = 1$
Donc $i$ et $-i$ sont valeurs propres simples de $M$. Soit $\lambda$ la troisième valeur propre de $M$, alors : $tr(M) = 1 = i + (-i) + \lambda \Rightarrow \lambda = 1$
Finalement $M$ admet trois valeurs propres distinctes en dimension 3 donc $\boxed{M \text{ est diagonalisable.}}$

---

**Exercice 2**

1) Montrer que : $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$ est bien définie.

2) On admet que : $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Montrer que : $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

---

1) $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Problème en 0 et en $+\infty$ pour $I$.

En 0 : $\frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} > 0$

Comme par Riemann $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est convergente, alors, par équivalent $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$ est convergente.

En $+\infty$ : $\frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} = o(\frac{1}{t^2})$, comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ alors, par négligeabilité, $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$ est convergente.

On a donc $\boxed{I \text{ convergente.}}$

2) $\frac{\sqrt{t}}{e^t-1} = \frac{\sqrt{t}}{e^t}\frac{1}{1-e^{-t}} = \frac{\sqrt{t}}{e^t}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{-t})^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sqrt{t}e^{-(n+1)t} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{t}e^{-nt}$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $\begin{array}{cccc} f_n & : & I = ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \sqrt{t}e^{-nt} \end{array}$

- $\int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int\limits_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-nt}dt$

Changement de variable $C^1$ bijectif : $u = \sqrt{nt}$, donc $t = \frac{u^2}{n}$ et $dt = \frac{2u}{n}du$

Alors : $\int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int\limits_0^{+\infty}\frac{u}{\sqrt{n}}e^{-u^2}\frac{2u}{n}du = \frac{1}{n^{3/2}}\int\limits_0^{+\infty} u2ue^{-u^2}du = \frac{1}{n^{3/2}}([-ue^{-u^2}]_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{n^{3/2}}$

On a alors tout ce qu'il faut pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on a le résultat.

---

**Planche 17. Mines-Télécom (Testeil Mathieu)**

**Exercice 1**

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $I_n = \int\limits_0^{+\infty}\frac{sin(\frac{t}{n})}{t(1+t^2)}dt$

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ , $|sin(x)| \leq |x|$

b) Montrer que $I_n$ est bien définie.

c) Montrer que : $\lim\limits_{n_to+\infty} I_n = 0$

d) Déterminer un équivalent de $I_n$ en $+\infty$

---

a) Avec le TAF : $|sin(x)| = |sin(x) - sin(0)| = |cos'(c)(x-0)| \leq |x|$

b) $t \mapsto \frac{sin(\frac{t}{n})}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $\left|\frac{sin(\frac{t}{n})}{t(1+t^2)}\right| \leq \frac{\frac{t}{n}}{t(1+t^2)} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+t^2}$

Comme $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$ est convergente, alors par comparaison $I_n$ est bien définie.

c) On pose $\begin{array}{ccccc} f_n & : & ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \frac{sin(\frac{t}{n})}{t(1+t^2)} \end{array}$

Alors $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle et $|f_n(t))| \leq \frac{1}{n}\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$

Avec le théorème de convergence dominée : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

d) On pose $g_n(t) = nf_n(t)$ Alors : $g_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ On a : $|g_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ Encore avec le théorème de convergence dominée : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

On a donc $\boxed{I_n \sim \frac{\pi}{2n}}$

**Exercice 2**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $(A, B) \in M_n(\mathbb{R}^2)^2$ telle que : $AB - BA = \alpha A$

a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ A^kB - BA^k = \alpha k A^k$

b) Montrer qu'il existe $k \in N^*\ ,\ A^k = 0$

---

a) Récurrence
Au rang $k = 1$ : $AB - BA = \alpha A$ c'est l'hypothèse de l'énoncé.

Supposons $HR_k$, on a donc : $A^kB - BA^k = \alpha k A^k$

Alors : $A^{k+1}B - BA^{k+1}$
$= A(A^kB) - (BA)A^k$
$= A(\alpha k A^k + BA^k) - (AB - \alpha A)A^k$
$= \alpha k A^{k+1} + ABA^k - ABA^k + \alpha A^{k+1}$
$= \alpha(k+1)A^{k+1}$

On a donc : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ A^kB - BA^k = \alpha k A^k}$

b) En prenant la trace de la relation du a), on a : $tr(A^kB) - tr(BA^k) = \alpha k tr(A^k)$, donc (comme $tr(MN) = tr(NM)$ et $\alpha \neq 0$), on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ tr(A^k) = 0$
Montrons alors par récurrence sur $n$ que $A$ est nilpotente.

Initialisation : Si $n = 1$
Alors $tr(A^1) = 0 \Rightarrow A = 0$ et donc $A$ est nilpotente.

Hérédité : Soit $n \geq 2$, on suppose la propriété vraie au rang $n - 1$.
Le théorème de Hamilton-Cayley donne : $A^k + \sum\limits_{p=1}^{n-1} a_i X^i + (-1)^n det(A) = 0$ donc en prenant la trace : $(-1)^n det(A) = 0$ et donc $det(A) = 0$
On en déduit que 0 est valeur propre de $A$. En choisissant comme premier vecteur, un vecteur de $ker(A)$,on a par changement de base $A$ semblable à $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ avec $L \in M_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $A_2 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$
On remarque que : $A_1^k = \begin{pmatrix} 0 & LA_2^{k-1} \\ 0 & A_2^k \end{pmatrix}$ et que $tr(A_2)^k = tr(A_1^k) = tr(A^k) = 0$
On peut donc appliquer à $A_2$ l'hypothèse de récurrence au rang $n - 1$, donc $A_2$ est nilpotente et avec la relation ci-dessus $A_1$ et donc $A$ est nilpotente.

Conclusion : $A$ est nilpotente et donc $\boxed{\exists k \in \mathbb{N}^*\ ,\ A^k = 0}$

---

**Planche 18. Mines-Télécom (Aboumouslim Tobilov)**

**Exercice 1**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n$ et $f \in L(E)$ tel que $f^2 = 4Id_E$

1) Montrer que $f$ est un automorphisme et exprimer $f^{-1}$.

2) Quelles sont les valeurs propres possibles de $f$ ?

3) $f$ est-il diagonalisable ?

4) Montrer que : $Im(f - 2Id_E) \subset ker(f + 2Id_E)$

5) On suppose que : $det(f) = 16$ et $tr(f) > 0$. Que dire de $n$ et de $f$ ?

---

1) $f \circ (\frac{f}{4}) = Id_E$ donc $\boxed{f \text{ est inversible et } f^{-1} = \frac{f}{4}}$

2) $X^2 - 4 = (X-2)(X+2))$ est un polynôme annulateur de $f$ donc $\boxed{sp(f) \subset \{-2, 2\}}$

3) $f$ admet un polynôme annulateur scindé simple dans $\mathbb{R}[X]$ donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

4) Soit $x \in E$.
$x \in Im(f - 2Id_E) \Rightarrow \exists y \in E\ ,\ x = f(y) - 2y$
Alors $(f + 2Id_E)(x) = (f + 2Id_E)(f(y)) - 2y) = f^2(y) - 2f(y) + 2f(y) - 4y = (f^2 - 4Id_E)(y) = 0_E$
donc $x \in ker(f + 2Id_E)$
On a donc $\boxed{Im(f - 2Id_E) \subset ker(f + 2Id_E)}$

5) Comme $sp(f) \subset \{-2, 2\}$ alors : $det(f) = 2^k(-2)^\ell$ et $tr(f) = 2k - 2\ell$ avec $k + \ell = n$
On a donc $|det(f)| = 2^n$
Donc si $det(f) = 16$ alors $2^n = 16 = 2^4$ donc $n = 4$
Alors $tr(f) = 2k - 2(4 - k) = 4k - 8$.
On a $k \in [\![0, 4]\!]$, mais la dernière relation impose $k > 2$ donc $k = 3$ ou $k = 4$.
Si $k = 3$ alors $det(f) = -16$ impossible, il reste $k = 4$ donc $f = 2Id_E$ qui est un cas qui convient.

Dans ce 5) : $\boxed{n = 4 \text{ et } f = 2Id_E}$

---

**Exercice 2**

On admet que : $\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$ , $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}cos(xt)dt$

a) Montrer que $f$ est définie et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $f$ vérifie l'équation différentielle : $2y'(x) + xy(x) = 0$

c) Déterminer $f(x)$.

---

a) On pose : $I = ]0, +\infty[$ et $\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R} \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & e^{-t^2}cos(xt) \end{array}$ pour avoir $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} g(x,t)dt$

On a $g$ $C^\infty$ sur $\mathbb{R} \times I$.
$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times I$ , $|g(x,t)| \le e^{-t^2}$ donc par comparaison à l'intégrale admise, $\forall x \in \mathbb{R}$ , $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $I$.
On a : $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -tsin(xt)e^{-t^2}$ donc $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \le te^{-t^2}$ avec $t \mapsto te^{-t^2}$ intégrable sur $I$.
On applique le théorème de dérivation de Leibniz pour une intégrale à paramètre et on a :
$\boxed{f \text{ qui est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

b) En prologeant le a), on a : $f'(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt = \int\limits_0^{+\infty} -tsin(xt)e^{-t^2}dt$
En intégrant par partie : (en primitivant $t \mapsto te^{-t^2}$) et parce que les limites du crochets existent :
$f'(x) = [sin(xt)\frac{e^{-t^2}}{2}]_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} xcos(xt)\frac{e^{-t^2}}{2}dt = 0 - 0 - \frac{x}{2}f(x)$
Donc $2f'(x) + xf(x) = 0$
$\boxed{f \text{ est solution de l'équation différentielle : } 2y'(x) + xy(x) = 0}$

c) On a une $EDL_1$ à coefficient continue sur $\mathbb{R}$ : $2y'(x) + xy(x) = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{-x}{2}y$
$\int \frac{-x}{2}dx = \frac{-x^2}{4}$
Donc d'après le cours : $\exists A \in \mathbb{R}$ , $f(x) = Ae^{-x^2/4}$
Mais $f(0) = A = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Finalement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \text{ , } f(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}cos(xt)dt = \frac{\sqrt{\pi}e^{-x^2/4}}{2}}$

---

**Planche 19. Mines-Télécom (Bonfanti Matéo)**

**Exercice 1**

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.

Calculer $\inf\limits_{M=(m_{i,j})\in S_n(\mathbb{R})} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(m_{i,j}-a_{i,j})^2$

---

On remarque que l'on cherche $d = \inf\limits_{M\in S_n(\mathbb{R})} ||M-A||^2$ avec $||.||$ la norme associée au produit scalaire canonique de $M_n(\mathbb{R})$

Par le théorème de projection orthogonale on a donc : $d = ||A - A_1||^2$ ou $A_1$ est le projeté orthogonale de $A$ sur $S_n(\mathbb{R})$

Mais, comme $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus^{\perp} A_n(\mathbb{R})$ (avec $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$), alors $d = ||A_2||^2$ ou $A_2$ est le projeté orthogonale de $A$ sur $A_n(\mathbb{R})$

On trouve $A_2 = \frac{A-A^T}{2}$ et donc $\boxed{d = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{i,j}-a_{j,i})^2}$

---

**Exercice 2**

On pose : $\forall n \geq 2$ : $f_n \; : \; \begin{array}{ccc} I=[0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{xe^{-nx}}{ln(n)} \end{array}$

1) Montrer que $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n$ converge simplement . On notera $f = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n$.

2) Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $I$, puis sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$

3) Etudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $I$

4) Montrer la continuité de $f$ sur $I$.

5) Etudier la dérivabilité de $f$.

---

1) Pour $x = 0$ : $f_n(x) = 0$ donc $\sum f_n(x)$ converge

Pour $x \neq 0$ : $f_n(x) = o(\frac{1}{n^2})$ donc $\sum f_n(x)$ converge

On a donc : $\boxed{\sum f_n \text{ converge simplement.}}$

2) • Etudions $f_n$ qui est dérivable. $\forall x \in I$ , $f'(x) = \frac{1}{ln(n)}[e^{-nx} - nxe^{-nx}] = \frac{e^{-nx}}{ln(n)}(1-nx)$

On a donc le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{n}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | - | |
| $f_n(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{enln(n)}$ | $\searrow$ | $0$ |

On en déduit : $||f_n||_{\infty}^{I} = \sup\limits_{x\in I}|f_n(x)| = \frac{1}{enln(n)}$

Comme $\sum \frac{1}{enln(n)}$ est divergente (par comparaison série-intégrale et puisque $\int \frac{1}{xln(nx)}dx = ln(ln(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$)
alors $\sum ||f_n||_\infty^I$ est divergente et donc $\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } I}$

• Soit $a > 0$.
Alors à partir du rang $\lfloor \frac{1}{a} \rfloor + 1$ on a $\frac{1}{n} < a$ et donc $||f_n||_\infty^{[a,+\infty[} = \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On en déduit donc que $\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } [a,+\infty[}$

3) • On pose $R_n(x) = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)$
Pour $n \geq N+1$ , $0 \leq f_n(x) = \frac{1}{ln(n)}xe^{-nx} \leq \frac{x}{ln(N+1)}e^{-nx}$
Donc $|R_n(x)| \leq \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x}{ln(N+1)}e^{-nx} \Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{x}{ln(N+1)} \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} (e^{-x})^n$
Série géométrique de raison $e^{-x} \in ]0,1[$ donc :

$|R_n(x)| \leq \frac{x}{ln(N+1)} \frac{e^{-(N+1)x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{ln(N+1)} \frac{\overbrace{e^{-Nx}}^{\leq 1} e^{-x}}{1-e^{-x}} \leq \frac{1}{ln(N+1)} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$

• On pose $A : x \in [0,+\infty[ \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$
Au voisinage de 0 : $A(x) = \frac{x(1+o(1))}{1-(1-x+o(x))} = \frac{x+o(x)}{x+o(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$
Donc $A$ est prolongeable par continuité en 0. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$ et $A$ est continue sur $[0,+\infty[$
On en déduit $A$ bornée sur $[0,+\infty[$ et donc $\exists M \in \mathbb{R}$ , $\forall x \geq 0$ , $|A(x)| \leq M$

• En revenant au calcul précédent : $\forall x \geq 0$ , $|R_n(x)| \leq \frac{M}{ln(N+1)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On a donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } I}$

4) Les fonctions $f_n$ sont continues sur $I$ et la convegence est uniforme, on en déduit donc que : $\boxed{f \text{ est continue sur } I.}$

5) • Soit $(a,A) \in \mathbb{R}^2$ , $0 < a < A$
$\forall x \in [a,A]$ , $f'(x) = \frac{e^{-nx}}{ln(n)}(1-nx)$ et donc : $|f_n'(x)| \leq \frac{e^{-na}}{ln(n)}(1+nA)$
Comme $\sum \frac{e^{-na}}{ln(n)}(1+nA)$ est convergente alors $\sum f_n'$ convege uniformément sur $[a,A]$.
Comme les $f_n$ sont $C^1$ sur $[a,A]$ et que $\sum f_n$ convege simplement vers $f$, on en déduit que $f$ est $C^1$ sur $[a,A]$.
Comme $]0,+\infty[= \bigcup\limits_{0<a<A} [a,A]$ alors $\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur } ]0,+\infty[.}$

- Etude en 0.

Pour $x > 0$ : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{ln(n)}$

Soit $A > 0$.

Comme $\sum \frac{1}{ln(n)}$ est une série de terme positifs divergente. Il existe $N \geq 2$ , $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{ln(n)} > A + 1$

Par continuité de $x \mapsto \sum_{n=2}^{N} \frac{e^{-nx}}{ln(n)}$ est continue en 0, alors :

$\exists x_0 > 0$ , $x \in [0, x_0] \Rightarrow \left| \sum_{n=2}^{N} \frac{e^{-nx}}{ln(n)} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{ln(n)} \right| \leq 1$ et donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq A - 1 + 1 = A$

Par définition de la limite $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$ Par contre la représentation graphique de $f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

---

**Planche 20. Mines Télécom (Maeva Cluzel)**

**Exercice 1**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$

1) Montrer que $(I_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

2) Trouver une relation de récurrence entre $I_{n+1}$ et $I_n$
Déterminer $\lim_{n \to +\infty} nI_n$

3) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

---

1) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ , $\forall x \in [0, 1]$ , $f_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$

$f_n$ est continue sur le segment $[0, 1]$ donc $I_n$ est bien convergente.

$f_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ var la fonction nulle et $\forall x \in ]0, 1]$ , $|f_n(x)| \leq e^{-2x}$, comme $x \mapsto e^{-2x}$ est intégrable sur $]0, 1]$, par le théorème de convergence dominée : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$

2) Par intégration par partie :

$I_n = [-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} e^{-2x}]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} 2e^{-2x} dx \Rightarrow I_n = \frac{1}{n+1} - 2\frac{I_{n+1}}{n+1} \Rightarrow \boxed{I_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} I_n}$

On a aussi : $nI_n = \frac{n}{n+1}(1 - 2 \underbrace{I_{n+1}}_{\to 0})$ donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} nI_n = 1}$

3) On a $I_n = \frac{1}{n+1} - 2\frac{I_{n+1}}{n+1}$ et $I_{n+1} = \frac{1}{n+2} - 2\frac{I_{n+2}}{n+2}$
donc $I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1}(\frac{1}{n+2} - 2\frac{I_{n+2}}{n+2})$

$I_n = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}(\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} - 2\frac{I_{n+2}}{n+2})$

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - (\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}))(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) + \underbrace{\frac{4I_{n+2}}{(n+1)(n+2)}}_{o(\frac{1}{n^2})}$$

On en déduit : $\boxed{I_n = \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}$

---

**Exercice 2**

On pose $V = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \ , \ \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ , \ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix}\}$

1) Montrer que $V$ est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$

2) Montrer que : $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R}) \ , \ < A, B >= tr(A^T B)$ est un produit scalaire sur $M_2(\mathbb{R})$

3) Déterminer une base orthonormée de $V^\perp$.

4) `Déterminer le projeté orthogonale de` $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ `sur` $V^\perp$

5) `Déterminer la distance de` $A$ `à` $V$.

---

1) $V = Vect(E_1, E_2)$ avec $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
donc $\boxed{V \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_2(\mathbb{R})}$

2) Cours

3) $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} \in V^\perp \Rightarrow < M, E_1 >=< M, E_2 >= 0 \Rightarrow \begin{cases} p - r = 0 \\ q + t = 0 \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} p & q \\ p & -q \end{pmatrix}$

Donc $V^\perp = Vect(E_3, E_4)$ avec $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Comme $< E_3, E_4 >= 0$, $(E_3, E_4)$ est une base orthogonale de $V^\perp$, en normant les vecteurs :

$$\boxed{(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}) \text{ est une base orthonormée de } V^\perp}$$

4) Par le théorème de projection orthogonale : le projeté orthogonal de $A$ sur $V^\perp$ est donné par $A^\perp = \frac{<A,E_3>}{2}E_3 + \frac{<A,E_4>}{2}E_4 = \frac{3}{2}E_3 + \frac{-1}{2}E_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

Donc $\boxed{A^\perp = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}}$

5) D'après le cours : a distance cherchée vaut :
$d = \sqrt{< A^\perp, A^\perp >} = \sqrt{9+1+9+1} = \sqrt{20}\ \boxed{= 2\sqrt{5}}$

---

**Planche 21. Mines-Télécom (Evangelista William)**

**Exercice 1**

Soit $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

1) Donner quatre méthodes pour montrer que $A$ est diagonalisable.

2) Résoudre $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = -x + y - z \\ z' = x - y + z \end{cases}$

---

1) i) sans calculs.
$A$ est symétrique réelle donc diagonalisable (dans une base orthonormée).

ii) Calcul de $A^2$
On remarque que : $A^2 = 3A$, donc $X(X-3)$ est donc un polynôme annulateur scindé simple de $A$ et donc $A$ est diagonalisable.

iii) Polynôme caractéristique et dimensions des sous-espaces propres

$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ 1 & X-1 & 1 \\ -1 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$ On fait $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2$

$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 1 & -1 \\ X & X-1 & 1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 1 & -1 \\ 0 & X-2 & 2 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = X(X^2-3X) = X^2(X-3)$

On en déduit $sp(A) = \{0, 3\}$
Comme $A$ est clairement de rang 1, alors, par le théorème du rang : $dim(ker(A)) = 2$
Comme 3 est valeur propre simple : $dim(ker(A - 3I_3)) = 1$.
1+2=3, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3, $A \in M_3(\mathbb{R})$ donc $A$ est diagonalisable.

iv) polynôme caractéristique et sous-espace propres

On a déjà le spectre avec le iii.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in ker(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x-y+z=0$$

Donc $ker(A) = vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ On trouve de même : $ker(A-3I_3) = vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$

On a une base diagonalisant $A$ par réunon des bases des sous-espaces propres.

2) On écrit le système $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Avec 1), on a la diagonalisation : $A = PDP^{-1}$ avec $D = diag(0,0,3)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

Alors $X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow Y' = DY$

Mais $Y' = DY \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ v' = 0 \\ w' = 3w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = a \\ v = b \\ w = ce^{3t} \end{cases}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

On revient à $X$ par $X = PY$ et on a : $\boxed{\begin{cases} x = a + ce^{3t} \\ y = a + b - ce^{3t} \\ z = b + ce^{3t} \end{cases}}$

---

**Exercice 2**

Soit $g(x) = \int\limits_0^1 t^x \frac{t-1}{ln(t)} dt$

1) Montrer que $g$ est définie sur $]-1,+\infty[$

2) Montrer que $g$ est $C^1$ sur $]-1,+\infty[$

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

---

1) Posons $I = ]-1,+\infty[$, $\begin{array}{cccc} f & : & I\times]0,1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \longmapsto & t^x \frac{t-1}{ln(t)} \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} \varphi & : & ]0,1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \frac{t-1}{ln(t)} \end{array}$

Au voisinage de $t=0$ : $\varphi(t) \sim \frac{-1}{ln(t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. On peut donc prolonger $\varphi$ par continuité en 0.

Au voisinage de $t=1$ : On pose $t = 1-h$ et alors $\varphi(t) = \frac{(1-h)-1}{ln(1-h)} = \frac{-h}{-h+o(h)} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$
On peut donc prolonger $\varphi$ par continuité en 1.

On peut donc en déduire que $\varphi$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et donc
$\exists M > 0\ ,\ \forall t \in ]0,1[\ ,\ |\varphi(t)| \leq M$

On a alors : $\forall x \in I\ ,\ |f(x,t)| \leq Mt^x$
Comme pour $x > -1$, $x \mapsto t^x$ est intégrable sur $]0,1[$ (par Riemann), alors, par comparaison $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1[$.
Donc $\boxed{g \text{ est définie sur } ]-1,+\infty[}$

2) $f$ est $C^1$ sur $I\times]0,1[$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = xt^{x-1}\varphi(t)$
Soit $A > 1$ et $a \in ]-1,0[$. Alors $\forall x \in [a,A]\ ,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq AMt^{a-1}$
Comme $a > -1$, alors $t \mapsto AMt^{a-1}$ est intégrable sur $]0,1[$
Les continuités partielles sont évidentes, on peut alors appliquer Leibniz et $g$ est $C^1$ sur $[a,A]$.
Comme $\bigcup_{-1<a<0<1<A} [a,A] = I$ alors $\boxed{g \text{ est } C^1 \text{ sur } I.}$

3) On considérera dans cette question que $x > 1$.

On a donc $\begin{cases} \forall t \in ]0,1[\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x,t) = 0 \\ \forall x > 1\ ,\ \forall t \in ]0,1[\ ,\ |f(x,t| \leq t^1\varphi(t) \\ \text{avec } t \mapsto t^1\varphi(t) \text{ qui est intégrable sur } ]0,1[ \end{cases}$ , on utilise alors le théorème de convergence dominée à paramètre continue et on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

---

**Planche 22. Mines-Télécom (Grisard Jade)**

**Exercice 1** : Idem Mathieu Testeil.

---

**Exercice 2**

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, muni de la base orthonormée canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$.
Déterminer $A$, la matrice, relativement à $B$, de la rotation d'axe $D$ : $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ qui transforme $e_2$ en $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$.

---

On appellera $f$ la rotation en question.

$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$ donc $e_1 - e_3$ est un vecteur directeur de $D$ et $f(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$

$(\frac{e_1-e_3}{\sqrt{2}}, e_2, \frac{e_1+e_3}{\sqrt{2}})$ est une base orthonormée directe.
Comme $f$ est une isométrie vectorielle directe, elle conserve les bases orthonormées donc :
$(f(\frac{e_1-e_3}{\sqrt{2}}), f(e_2), f(\frac{e_1+e_3}{\sqrt{2}})$ est une base orthonormée directe.
donc $(\frac{e_1-e_3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3), \frac{1}{\sqrt{2}}f(e_1+e_3))$ est une base orthonormée directe.
donc $\frac{1}{\sqrt{2}}f(e_1+e_3) = \frac{e_1-e_3}{\sqrt{2}} \wedge \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3) = \frac{-2e_2}{2} = -e_2$

On a donc $\begin{cases} f(e_1)+f(e_3) = -\sqrt{2}e_2 \\ f(e_1)-f(e_3) = e_1 - e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(e_1) = \frac{e_1-\sqrt{2}e_2-e_3}{2} \\ f(e_3) = \frac{-e_1-\sqrt{2}e_2+e_3}{2} \end{cases}$

Comme on connaît $f(e_3)$ on en déduit $\boxed{A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2} & -1\\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ -1 & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}}$

---

**Planche 23. Mines-Télécom (SAUVAITRE Sidonie)**

**Exercice 1**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et les matrices suivantes d'ordre $p$ (avec $p \geq 2$)

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$I_p$ matrice identité d'ordre $p$

a. Que peut-on dire de $M(a,b)$ ?
b. Montrer que 0 est valeur propre de $N$. Trouver une matrice $P$ inversible et $D$ une matrice diagonale telles que $N = PDP^{-1}$.
c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b)$ tel que $M(a,b)$ soit inversible et calculer $[M(a,b)]^{-1}$.

---

a) $\boxed{M(a,b) \text{ est symétrique réelle donc diagonalisable.}}$

b) • Clairement $rg(N) = 1 < p$ donc $N$ n'est pas inversible donc $det(N) = 0$ et donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } N.}$
$N$ est symétrique réelle donc diagonalisable dans ue base orthonormée.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est l'hyperplan d'équation $x_1+x_2+\dots+x_n = 0$,et $(1,1,\dots,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $p$.

On a donc $N = PDP^{-1}$ avec $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p \end{pmatrix}}$

c) $M(a,b) = (a-b)I_p + bN$ donc $M(a,b) = P\Delta(a,b)P^{-1}$
avec $\Delta(a,b) = diag(a-b, \dots, a-b, a-b+pb) = diag(a-b, \dots, a-b, a+(p-1)b)$

On a donc $M(a,b)$ inversible $\Leftrightarrow \Delta(a,b)$ inversible $\Leftrightarrow \begin{cases} a-b \neq 0 \\ a+(p-1)b \neq 0 \end{cases}$

Un polynôme annulateur de $M(a,b)$ est alors :
$(X-(a-b))(X-(a+(p-1)b)) = X^2 - (2a+(p-2)b)X + (a-b)(a+(p-1)b)$
On a donc : $M(a,b)^2 - (2a+(p-2)b)M(a,b) = -(a-b)(a+(p-1)b)I_p$
$\Rightarrow M(a,b)(M(a,b) - (2a+(p-2)b)I_p) = -(a-b)(a+(p-1)b)I_p$

Conclusion : $\boxed{M(a,b) \text{ est inversible ssi } \begin{cases} a \neq b \\ a \neq (1-p)b \end{cases} \quad \text{et, dans ce cas : } [M(a,b)]^{-1} = \frac{M(a,b)-(2a+(p-2)b)I_p}{-(a-b)(a+(p-1)b)}}$

---

**Exercice 2**

Soit $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\Phi_n(t) = \frac{e^t}{1+t^n}$.
On pose pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \int\limits_0^x \Phi_n(t)dt$.

1. a. Etudier $f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ (tableau de variations et limites).

1. b. Soit $a$ un réel `positif`. Montrer qu'il existe un unique $x_n(a)$ tel que $\int\limits_0^{x_n(a)} \Phi_n(t)dt = a$.

2. Déterminer $\lim\limits_{a\to+\infty} x_n(a)$.

3. Soit $A < 1$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^A \Phi_n(t)dt = e^A - 1$.

4. Soit $A \geq 1$, étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^A \Phi_n(t)dt$.

---

1.a) $f_n$ est une primitive de $\Phi_n$ qui est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$, donc $f_n'(x) = \Phi_n(x) \geq 0$
$f_n(0) = 0$
Comme $\Phi_n(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \Phi_n(t)dt$ est divergente et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

On a donc :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f_n(x)$ | $0$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

1.b) L'équation s'écrit $f_n(x) = a$, comme $f_n$ est strictement croissante et continue et que $a \geq 0$, il existe un unique $x_n(a)$ tel que $f_n(x_n(a)) = a \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_n(a)} \Phi_n(t)dt = a$

2) $f_n$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et $x_n(a) = (f_n)^{-1}(a)$
Comme $f_n$ est croissante alors $h_n$ est aussi croissante.
On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n(a) = \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n(a) = +\infty$

Mais $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n(a) = \lambda$ est impossible car sinon $\underbrace{\int_0^{x_n(a)} \Phi_n(t)dt}_{\underset{a \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\lambda} \Phi_n(t)dt \in \mathbb{R}} = \underbrace{a}_{\underset{a \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n(a) = +\infty}$

3) On a : $A < 1$. Donc $\forall t \in [0, A]$ , $\Phi_n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^t$
De plus $0 \leq \Phi_n(t) \leq e^t$ et $t \longmapsto e^t$ est intégrable sur $[0, 1]$
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int\limits_0^A \Phi_n(t)dt = \int\limits_0^A e^t dt = e^A - 1}$$

4) On fait de même si $A \geq 1$ avec $\Phi_n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} e^t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{e^t}{2} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } 1 < t \leq A \end{cases}$

Donc si $A > 1$ : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^A \Phi_n(t)dt = \int\limits_0^1 e^t dt = e - 1}$

---

**Planche 24. Mines-Télécom (ASSAFARI Fatima)**

**Exercice 1**

`On définit la suite` $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$ , $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$
On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$

Q1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ , $0 \leq a_n \leq n!$ et en déduire que $S$ est définie sur $I = ]-1, 1[$

Q2. Montrer que $\forall x \in I$ , $S'(x) = (1 + x)S(x)$

Q3. Déterminer $S$ et en déduire $a_n$.

Q4. ?

---

Q1) • Par récurrence, initialisée avec les valeurs de $0 \leq a_0 = 1 \leq 1 = 0!$ et $0 \leq a_1 = 1 \leq 1 = 1!$
Si on suppose $0 \leq a_{n-1} \leq (n-1)!$ et $0 \leq a_{n-2} \leq (n-2)!$ alors :
$0 \leq a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} \leq (n-1)! + (n-1)(n-2)! = (n-1)! + (n-1)! = \underbrace{2}_{\leq n}(n-1)! \leq n!$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \leq a_n \leq n!}$

• Avec ce qui précède : $0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq 1$ et comme $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1, alors par comparaison, $S$ a un rayon de convergence $R \geq 1$ et donc $\boxed{S \text{ est définie sur } I.}$

Q2) En tant que série entière, $S$ est $C^\infty$ et dérivable terme à terme sur $I$.
On a : $\forall x \in I\ ,\ S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1}$
Avec la relation de récurrence : $S'(x) = a_1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}}{(n-1)!} x^{n-1}$
Comme les séries sont convergentes : $S'(x) = \underbrace{\underbrace{1}_{a_0} + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1}}_{S(x)} + \underbrace{\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} x^{n-1}}_{xS(x)}$

On a donc : $\boxed{\forall x \in I\ ,\ S'(x) = (1+x)S(x)}$

Q3) On résout l'équation différentielle ci-dessus sur $I$. Comme $\int (1+x)dx = x + \frac{x^2}{2}$ alors d'après le cours : $S(x) = a exp(x + x^2/2))$ avec $a \in \mathbb{R}$
Mais $S(0) = a_0 = 1$ et donc $a = 1$ et donc $\boxed{\forall x \in I\ ,\ S(x) = exp(x + \frac{x^2}{2})}$

On a alors : $S(x) = \left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!}\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{2q}}{2^q (2q)!}\right)$
Comme les rayons de convergence des deux séries entières ci-dessus valent $+\infty$ on a, par produit de Cauchy : $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{p+2q=n} \frac{1}{p! 2^q (2q)!}\right) x^n$

Par unicité du $DSE_0$ : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n = \sum\limits_{\substack{p+2q=n \\ 0 \leq p,q}} \frac{n!}{p! 2^q (2q)!}}$

Remarque : j'ai pas mieux ...

---

**Exercice 2**
Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. telle que $tr(A) = 0$ et $(A - I_n)$ non inversible.
Q1. Déterminer les valeurs propres et leur ordre de multiplicité.
Q2. $A$ est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ ?
Q3. Que dire de l'endomorphisme associé à $A$ ?

---

Q1) $A - I_n$ non inversible donne 1 valeur propre.
Comme on est dans $M_2(\mathbb{C})$, soit $\lambda$ l'autre valeur propre de $A$, alors, avec la trace : $\lambda = -1$
On a donc $sp(A) = \{-1, 1\}$ et $A$ admet deux valeurs propres simples.

Q2) Q1) permet de conclure que $A$ est diagonalisable

Q3) On a même $A$ semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $A$ est la matrice d'une symétrie par rapport à une droite et parallèlement à une autre.

Remarque : pas très sûr de l'énoncé.

---

# 3 Centrale

## 3.1 Centrale : mathématiques 1

### Planche 25. Centrale Math 1 (Mathieu Testeil)

**Exercice**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Si $E$ est un événement on note $1_E$ la variable aléatoire définie par : $\forall \omega \in \Omega\ ,\ 1_E(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in E \\ 0 \text{ si } \omega \notin E \end{cases}$

1) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les variables aléatoires.

2) Soit $A$ et $B$ deux événements de $\mathscr{A}$.
Montrer que : $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$ en calculant $cov(1_A, 1_B)$

3) On note $S_n$ l'ensemble des bijection de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$.
Si $\sigma \in S_n$, on dit que $i \in [\![1;n]\!]$ est un point fixe de $\sigma$ si et seulement si $\sigma(i) = i$

On prend un élément de $S_n$ de manière équiprobable.

On note $E_i$ l'événement : $i$ est un point fixe et $F$ la variable aléatoire donnant le nombre de point fixe.

3) Calculer $\mathbb{P}(E_i)$, $\mathbb{P}(E_i \cap E_j)$ (pour $i \neq j$)

4) Calculer $\mathbb{E}(F)$

---

1) D'après le cours, si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrète admettant une variance :
$\boxed{|cov(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}}$

2) $cov(1_A, 1_B) = E(1_A 1_B) - E(1_A)E(1_B) = E(1_{A\cap B}) - E(1_A)E(1_B) = \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
$V(A) = E((1_A)^2) - E(1_A)^2 = E(1_A) - E(1_A)^2 = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - \mathbb{P}(A))^2 \leq \frac{1}{4}$
De même $V(B) \leq \frac{1}{4}$

Avec le 1) : $\boxed{|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}}$

3) Par équiprobabilité :
$\mathbb{P}(E_i) = \frac{\text{nb de permutation ayant i comme points fixe}}{\text{nb de permutations}} = \frac{\text{nb de permut de } [\![1;,n]\!] \backslash \{i\}}{card(S_n)} = \frac{card(S_{n-1})}{card(S_n)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

De même, si $i \neq j$ $\mathbb{P}(E_i \cap E_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$

4) Soit $X_i = 1_{E_i}$ alors $F = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

Par linéarité de l'espérance : $E(F) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$

On a donc : $\boxed{E(F) = 1}$

---

**Planche 26. Centrale Math 1 (Bonfanti Matéo)**

**Exercice**

On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. A chaque pas, on avance de 1 avec une probabilité de $p \in ]0,1[$ ou de $-1$ avec une probabilité de $q = 1-p$.
On définit la variable aléatoire $X_n$ qui est égale à la position au $n$-ième ème tour.
On a suppose $X_0 = 0$.

a) Calculer $P(X_n = 0)$

b) Donner la nature de : $\sum P(X_n = 0)$

On définit $B_n$ la variable aléatoire qui vaut 1 si $X_n = 0$ et 0 sinon.

Q2 a) Déterminer la loi de $B_n$ et ... (visiblement question dure ...)
b) ? ? ? ? ?

---

a) De manière évidente $P(X_n = 0) = 0$ si $n$ est impaire, puisque $X_n$ à la même parité que $n$.
Si $n = 2k$, alors : $P(X_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} p^k q^k = \frac{(2k)!}{(k!)^2}(p(1-p))^k$

b) Avec Stirling : $P(X_{2k} = 0) \sim \frac{(4p(1-p))^k}{\sqrt{k\pi}}$

On a le T.V. suivant : $\begin{array}{|c|ccccc|} \hline p & 0 & & \frac{1}{2} & & 1 \\ \hline & & & 1 & & \\ & & \nearrow & & \searrow & \\ & 0 & & & & 0 \\ \hline \end{array}$

cas 1 : $p \neq \frac{1}{2}$
Alors $4p(1-p) \in ]0,1[$ donc $P(X = 2k) = o(\frac{1}{k^2})$, donc $\sum P(X_{2k} = 0)$ est convergente et donc $\sum P(X_n = 0)$ est convergente.

cas 2 : $p = \frac{1}{2}$

Alors $4p(1-p) = 1$ donc $P(X = 2k) \sim \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$ donc $\sum P(X_{2k} = 0)$ est divergente et donc $\sum P(X_n = 0)$ est divergente.

Q2) a) $B_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_n = 0) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \binom{2k}{k}(p(1-p))^k \text{ si } n = 2k \end{cases}$

**Planche 27. Centrale Math 1 (Tobilov Aboumouslim)**

**Exercice**
Soit $E = \mathbb{R}^n$ l'espace euclidien canonique. `Soit` $A \in M_n(\mathbb{R})$

1) On suppose, dans cette question seulement, qu'il existe $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = P\Delta Q$ avec $\Delta$ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont positifs ou nuls.

Montrer que les éléments diagonaux de $\Delta^2$ sont les valeurs propres de $A^T A$. Que dire de la matrice $Q$ ?

2) Montrer que $sp(A^T A) \subset \mathbb{R}^+$.

3) Montrer que le nombre de valeurs propres non nulles de $A^T A$, comptées avec leur ordre de multiplicité, sont égales à rang de $A$.

Question bonus : inégalité de Markov

---

1) $A^T A = (Q^T \Delta P^T)(P\Delta Q) = Q^T \Delta^2 Q$
donc $A^T A$ est semblable à $\Delta^2$ (car $P^T = P^{-1}$ puisque $P \in O_n(\mathbb{R})$)
donc les éléments diagonaux de $\Delta^2$ sont les valeurs propres de $A^T A$.

Je ne sais que dire de la matrice $Q$ ?

2) $\lambda \in sp(A^T A)$
$\Rightarrow \exists X \neq 0\ ,\ A^T A X = \lambda X$
$\Rightarrow \exists X \neq 0\ ,\ X^T A^T A X = \lambda X^T X$
$\Rightarrow \exists X \neq 0\ ,\ ||AX||^2 = \lambda\, ||X||^2$
$\Rightarrow \lambda \geq 0$

Donc $\boxed{sp(A^T A) \subset \mathbb{R}^+}$

3) $AA^T$ semblable à $\Delta^2$ qui est de rang le nombre de valeurs propres non nulles de $\Delta^2$ donc de $AA^T$

---

## 3.2 Centrale : mathématiques 2

**Planche 28. Centrale Math 2** *Testeil Mathieu*

**Exercice**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a > 0$, on note $S_a(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^a$

1) Redémontrer les résultats connus pour $S_1(n)$ et $S_3(n)$ sachant que $S_3(n) = (S_1(n))^2$

2) Ecrire un programme Python, qui prend en paramètre trois entiers $a$, $b$, et $c$ avec $a > 0$, $b > 0$ et $c > 1$ et qui teste si pour tout $n \leq 20$ $S_a(n) = (S_b(n))^c$

3) Tester cette fonction pour tout $a \leq 20$, $b \leq 20$ et $c \leq 20$

4) On pose, pour tout $\alpha > -1$, pour tout $n > 1$ : $a_n = \int\limits_0^n t^\alpha dt - \frac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k^\alpha + (k+1)^\alpha)$

4) a) Trouver un équivalent de $a_{n+1} - a_n$

4) b) Montrer que : $\forall c > 0$ , $\sum\limits_{k=1}^{n} k^c \sim \frac{n^{c+1}}{c+1}$

5) a) Montrer que si $S_a(n) = (S_b(n))^c$ avec $a > 0$, $b > 0$ et $c > 1$ alors $\begin{cases} a+1 = c(b+1) \\ a+1 = (b+1)^c \end{cases}$

5) b) Etudier $t \mapsto t^{\frac{1}{t-1}}$ sur $]1, +\infty[$

5) c) Montrer que les seules solutions entières du 5) a) sont celles conjecturées en 3).

---

1) Récurrence : $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (S_1(n))^2$

```
def Q2(a,b,c):
    test=True
    n=0
    Sa=0
    Sb=0
    while n<20:
        n=n+1
        Sa=Sa+n**a
        Sb=Sb+n**b
        if Sa != Sb**c:
            return False
    return True
```

```
def Q3():
    for a in range(0,21):
        for b in range(0,21):
            for c in range(1,21):
                if Q2(a,b,c) and a!=b:
                    print('a=',a,' b=',b,' c=',c)
Q3()
```

Il semblerai que çà ne marche que pour $a = 3$, $b = 1$ et $c = 2$ ...

Q4) a) $a_n = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(k^\alpha + (k+1)^\alpha)$

$$\begin{aligned}
&a_{n+1} - a_n \\
&= \tfrac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \tfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \tfrac{1}{2}[n^\alpha + (n+1)^\alpha] \\
&= \tfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}(1+\tfrac{1}{n})^{\alpha+1} - \tfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \tfrac{1}{2}n^\alpha - \tfrac{1}{2}n^\alpha(1+\tfrac{1}{n})^\alpha \\
&= \tfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(1 + \tfrac{\alpha+1}{n} + \tfrac{(\alpha+1)\alpha}{2n^2} + \tfrac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{6n^3} + o(\tfrac{1}{n^2})\right) - \tfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \tfrac{1}{2}n^\alpha - \tfrac{1}{2}n^\alpha(1 + \tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2n^2} + o(\tfrac{1}{n^2})) \\
&= \tfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + n^\alpha + \tfrac{\alpha}{2}n^{\alpha-1} + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{6}n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2}) - \tfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \tfrac{1}{2}n^\alpha - \tfrac{1}{2}n^\alpha - \tfrac{\alpha}{2}n^{\alpha-1} - \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{4}n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2}) \\
&= \tfrac{\alpha(1-\alpha)}{12}n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2})
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{a_{n+1} - a_n \sim \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}n^{\alpha-2}}$

4) b) Comme $c > 0$, alors $t \mapsto t^c$ est croissante, donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , $k^c \leq \int_k^{k+1} t^c \leq (k+1)^c$

Avec l'inégalité de gauche : $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \leq \int_1^{n+1} t^c dt = \frac{(n+1)^{c+1}}{c+1} \sim \frac{n^{c+1}}{c+1}$

Avec l'inégalité de droite : $\int_1^n t^c dt \leq \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^\alpha \Rightarrow \frac{n^{c+1}}{c+1} \leq \sum_{k=1}^{n} k^c - 1$

De tout çà on déduit : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^c \sim \frac{n^{c+1}}{c+1}}$

Remarque : je ne vois pas l'intérêt du a), si ce n'est de mettre sur la voie.

5) a) $S_a(n) = (S_b(n))^c$ en passant aux équivalents avec le 4) :
$\Rightarrow \frac{n^{a+1}}{a+1} \sim \left(\frac{n^{b+1}}{b+1}\right)^c \Rightarrow n^{(a+1)-c(b+1)} \sim \frac{a+1}{(b+1)^c}$

Pour que les limites en $+\infty$ soient cohérentes : $\begin{cases} (a+1) - c(b+1) = 0 \\ \frac{a+1}{(b+1)^c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1) = c(b+1) \\ a+1 = (b+1)^c \end{cases}$

5) b) On a donc : $c(b+1) = (b+1)^c \Rightarrow c = (b+1)^{c-1} \Rightarrow b+1 = c^{\frac{1}{c-1}}$

On étudie donc $f : t \mapsto t^{\frac{1}{t-1}}$ sur $I = ]1, +\infty[$
$f$ est dérivable sur $I$ : $f(t) = exp(\frac{1}{t-1} ln(t))$ et donc
$f'(t) = [\frac{1}{t(t-1)} - \frac{ln(t)}{(t-1)^2}]exp(\frac{1}{t-1}ln(t)) = [\frac{t-1-tln(t)}{t(t-1)^2}]exp(\frac{1}{t-1}ln(t))$

On pose : $\forall t \in I$ , $g(t) = t - 1 - tln(t)$, $g$ dérivable et $g'(t) = 1 - 1 - ln(t) = -ln(t) < 0$ sur $I$, donc $g$ décroissante sur $I$, comme $g(1) = 0$ alors $g(t) \leq 0$ sur $I$ et donc $f'(t) \leq 0$ sur $I$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 1$ et $\lim\limits_{t \to 1^+} f(t) = e$. Donc $\forall t \in I$ , $1 < f(t) < e$
La seule (par stricte croissance et continuité) valeur entière possible pour $f(t)$ est $f(2) = 2$
Comme $b + 1 = f(c)$, alors si $b$ et $c$ sont entiers, on a $b + 1 = c = 2$, on en déduit le résultat.

---

**Planche 29. Centrale Math 2** *(Bonfanti Matéo)*

**Exercice**

On aura : import numpy as np et import matplotlib.pyplot as plt

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$

Q1) Donner les 10 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$
Donner aussi les valeurs de $\frac{2}{u_n}$
Que peut on conjecturer pour la convergence de la suite $(u_n)$ ?

Q2) Soit $t \in [0, \pi[$ et $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - (n\pi)^2}$ et $g(t) = \frac{cos(t)}{sin(t)} - \frac{1}{t}$
a) Déterminer $\lim\limits_{t \to 0} g(t)$
b) Montrer que $f$ et $g$ sont continue sur $[0, \pi[$.

Q3) Tracer $g$ et $f$ sur $[0, \pi[$. Que remarque-t-on ?
Pour la suite **on admet ce résultat**.

Q4) Déterminer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ln(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2})$
Indication : on pourra définir $G(x) = \int\limits_0^x g(t)dt$ pour $x \in [0, \pi[$, intégrale que l'on pourra calculer de 2 manières différente.

Q5) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

---

```
Q1)
def prem_val(n):
   p=1
   for k in range(1,n+1):
      p=p*(1-1/(4*k*k))
      print('u(',k,')=',p)
      print('2/u(',k,')=',2/p)

prem_val(10)
```

On peut penser que $(u_n)$ converge vers $\frac{2}{\pi}$

Q2) a) $g(t) = \frac{tcos(t)-sin(t)}{tsin(t)} = ...$ DL et donc $\boxed{\lim_{t\to 0} g(t) = 0}$

Q2) b) • Pour $t \in ]0, \pi[$ :

$g(t)$
$= \frac{cos(t)}{sin(t)} - \frac{1}{t}$
$= \frac{tcos(t)-sin(t)}{tsin(t)}$
$= \frac{t\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}}{t\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}}$
$= \frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} [\frac{(-1)^n}{(2n)!} - \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}] t^{2n+1}}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{(2n+2)!}}$
$= \frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n-1}}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}}$

Le dénominateur ne s'annule pas en 0 (et vaut 1). La relation est valable en 0.
Donc $g$ est $C^\infty$ au voisinage de 0 comme quotient de deux séries entières $C^\infty$ au voisinage de 0.
Finalement $g$ est $C^\infty$ sur $[0, \pi[$

• On pose, pour $n \geq 1$ : $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,\pi[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \frac{2t}{t^2-(n\pi)^2} \end{array}$

Soit $b \in ]0, \pi[$. Pour $n \geq 1$ , $|f_n(t)| = \frac{2t}{(n\pi)^2-t^2} \leq \frac{2b}{(n\pi)^2-b^2}$ et il y a donc convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ sur $[0, b[$
La continuité étant conservé : $\sum f_n$ est continue sur $[0, b[$.
Ceci pour tout $b \in ]0, \pi[$, donc $f$ est continue sur $[0, \pi[$

```
Q3)
X=np.linspace(0,3,1000)
def g(t):
    return np.cos(t)/np.sin(t)-1/t
def f(t):
   s=0
 for k in range(1,100):
      s=s+2*t/(t**2-k**2*np.pi**2)
   return s
Y=g(X)
Z=f(X)
plt.figure()
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,Z)
plt.show()
```

Il semblerait que $f = g$!!!!

Q4) $g$ est continue sur $[0,\pi[$ et on peut donc poser $\forall x \in [0,pi[$ , $G(x)=\int\limits_0^x g(t)dt$

Avec la relation admise en Q3) (cf centrale PC math 2 , 2024) :

$\int\limits_0^x g(t)dt = \int\limits_0^x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)dt$

Comme il y a convergence uniforme sur $[0,x]$

$\int\limits_0^x (\frac{cos(t)}{sin(t)} - \frac{1}{t})dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^x \frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}dt$

$\Rightarrow ln(\frac{sin(x)}{x}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}[-ln(n^2\pi^2-t^2)]_0^x$

$\Rightarrow ln(\frac{x}{sin(x)}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ln\big(\frac{n^2\pi^2-x^2}{n^2\pi^2}\big)$

$\Rightarrow \boxed{ln(\frac{x}{sin(x)}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ln\big(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\big)}$

Q5) On reprend la question précédente en $x=\frac{\pi}{2}$ :

$ln(\frac{\pi}{2}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ln\big(1-\frac{\pi^2}{4n^2\pi^2}\big) \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \prod\limits_{n=1}^{+\infty}\big(1-\frac{1}{4n^2}\big)$

On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}}$

ce qui confirme la conjecture du début

---

**Planche 30. Centrale Math 2** *(Lajoignie Maxime)*

**Exercice**

On jette n boules de manière indépendantes dans $N$ trous, elles atterrissent dans un trou avec une probabilité de $\frac{1}{N}$.
On note $T_n$ la variable aléatoire comptant le nombre de trou non vide au $n$-ieme lancé.

1) Programmer une fonction **remplir**, de paramètre $(n,N)$ qui crée une liste de taille $N$ et simule $n$ lancés (l'indice de la liste correspondant au numéro du trou) et renvoie la liste, avec le nombre de boules dans chaque trou.
Programmer une fonction **nonvide(n, N)** renvoyant le nombre de case non vide après $n$ tirages.

Que devient $nonvide(10,n)$ pour $n$ très grands ?

2) Donner les valeurs prises par $T_n$ en fonction de $n$ et $N$, en particulier exprimer les lois de $T_1$ et de de $T_2$.

3) a) Calculer $\mathbb{P}(T_n=1)$ et $\mathbb{P}(T_n=k)$ si $k>n$
3) b) Trouver une relation de récurrence sur les $\mathbb{P}(T_n=k)$

4) Ecrire une procédure $T(n,k,N)$ permettant de calculer $\mathbb{P}(T_n=k)$

5) En utilisant la question 1), sur un grand nombre d'expériences, tester $T(25,8,20)$

---

```
import random as rd

def remplir(n,N):
  L=[0]*N
  for i in range(n):
    a=rd.randint(0,N-1)
    L[a]+=1
  return L

def nonvide(n,N):
  L=remplir(n,N)
  print(L)
  c=0
  for i in L:
    if i>0:
      c=c+1
  return c
```

Pour $n$ grand, nonvide(10,n) donne 10 avec une forte probabilité car tout les trous sont pleins.

2) • $T_n(\Omega) = \begin{cases} [\![1, n]\!] & \text{si } 1 \leq n \leq N \\ [\![1, N]\!] & \text{si } n \geq N \end{cases}$

• $T_1$ est la loi certaine égale à 1.

• Loi de $T_2$ : $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$, $\mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{N}$ et $\mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - \frac{1}{N}$

3) $\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1}{N^{n-1}}$ et $\mathbb{P}(T_n = k) = 0$ si $k > n$

4) Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(T_n = k)_{1 \leq i \leq N}$ on a : $\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = i)\mathbb{P}(T_n = i)$
Mais clairement $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = i) = 0$ si $k > i + 1$ ou si $k < i - 1$, il reste donc :
$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k - 1)\mathbb{P}(T_n = k - 1) + \mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k)\mathbb{P}(T_n = k)$

$\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k) = \frac{k}{N}$ et $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k - 1) = \frac{n-(k-1)}{N} = \frac{n+1-k}{N}$ donc
$\boxed{\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{n+1-k}{N}\mathbb{P}(T_n = k - 1) + \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k)}$

---

**Planche 31. Centrale Math 2** *(Tobilov Aboumouslim)*

**Exercice**

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$ , $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

1) a) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente.
`Donner une valeur approchée de sa somme à` $10^{-6}$ `près.`

1) b) Montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = ln(2)$

On réordonne la suite $(u_n)$ en une suite $(v_n)$ de telle sorte que les termes positifs soit rangés dans le même ordre, les termes négatifs soit rangés dans le même ordre et que deux termes positifs alternent avec un négatif.

Exemple : $(v_n)_{0 \leq n \leq 8} = (1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{-1}{6})$

On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

2) a) `Ecrire une fonction Python, qui a` $n \in \mathbb{N}$ `associe` $v_n$

Indication : on pourra distinguer les cas $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$, ...

2) b) `Donnez les valeurs de` $v_{250}$ `,` $v_{251}$ `et` $v_{252}$`.`

2) c) `Donnez les valeurs de` $\sigma_{250}$ `,` $\sigma_{251}$ `et` $\sigma_{252}$.

2) d) `Conjecturer la valeur de` $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

3) Démontrer le résultat conjecturer en 2) d).

---