ORAUX BLANCS PSI, Mr Charitat : SERIE 4

CHAMIGNON Lucas

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1) La matrice A est-elle trigonalisable ?
1) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3) Donnez les droites stables de A.
4) Donnez les plans stables de A

Exercice 2

Soit $a \in [0,1]$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in]0,1]$, $f_n(x) = \frac{1-e^{-nx}}{x^a(1+x^2)}$

1) Montrez que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.
2) Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles il y a convergence uniforme sur $]0,1]$?
3) Montrez que l'intégrale $I_n = \int\limits_0^1 f_n(x)dx$ est convergente pour tout $a \in [0,1]$
4) Pour $a \in]0,1[$, montrez la suite (I_n) est convergente et déterminez sa limite sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.
5) Reprendre le 4) pour $a = 1$

DIOT GERMAIN Simon

Exercice 1

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$, $g_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n e^t$

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $I_n(x) = \int\limits_0^x g_n(t)dt$

1°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$, $|g_n'(t)| \leq \frac{e^t}{n}$
2°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$, $|g_n(t) - 1| \leq \frac{te^t}{n}$
3°) Etudier la convergence simple de la suite de fonction $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
4°) Etudier la convergence uniforme de la suite de fonction $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$

Exercice 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2) Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) \end{cases}$

4) Résoudre le système différentiel précédent en ajoutant les conditions initiales $x(0) = y(0) = 1$

DJABI Mohamed

Exercice 1

Soit u est un endomorphisme de E, un K espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ pour lequel il existe $x_0 \in E$ tel que $(u(x_0), \dots, u^n(x_0))$ est libre.

1) Montrez que $B = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

2) Montrez que u est un automorphisme et écrire sa matrice dans la base B.

3) Montrez que les sous-espaces propres de u sont de dimension 1 et en déduire une CNS pour que u soit diagonalisable.

4) On suppose que $n = 4$ et que $u^4(x_0) = x_0$

Donnez la matrice de u dans B. u est-il diagonalisable ? Trouvez le commutant de u.

Exercice 2

Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{ln(t)}$ et $D =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

a) Montrer que f est définie sur D.

b) Montrer que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$ sur D.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Etudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

e) Etudier f au voisinage de 1.

f) Etudier f au voisinage de 0.

g) Tracer la représentation graphique de f.

GUARNIERI Antoine

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $E = M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\forall (X,Y) \in E \quad < X, Y >= X^T AY$.

a) Montrer que $<,>$ définit un produit scalaire sur E.

b) Diagonaliser A dans $M_3(\mathbb{R})$

c) Trouver une base orthogonale de E pour le produit scalaire $<,>$

d) Déterminer la distance de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ au plan P d'équation x+y+z=0.

Exercice 2

On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} cos(\sqrt{n}x)$

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$?

(c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a; +\infty[$?

(d) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0; +\infty[$?

CLERGOT Yoann

Exercice 1

On pose pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(nx)}{1+n^4x^3} dx$

a) Montrer que I_n est convergente.

b) Montrer que $I_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}} J_n$ avec $J_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}} sin\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{3}}}\right)}{1+t^3} dt$

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = K$ avec $K = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$

d) Prouver que : $2K = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3} dt$

e) En déduire que $I_n \sim \frac{2\pi\sqrt{3}}{9n^{\frac{5}{3}}}$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre μ

On suppose que X et Y sont indépendantes et on pose $Z = X + Y$.

a) Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de X et prouver ces formules.

b) Déterminer la loi de Z.

c) Calculer $\mathbb{P}(X = k|Z = n)$ et reconnaître cette loi de probabilité.

GARNIER Baptiste

Exercice 1

1°) Montrer que : $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

On pose $I = [0; +\infty[$ et $\forall x \in I$,$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \arctan(\frac{n+x}{1+nx})$

2°) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On pose $\forall x \in I$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_n(x) = f_n(x) + \arctan(x) - \frac{\pi}{2}$

3°) Etudier la monotonie de g_n sur I.

4°) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur I ?

Exercice 2

Soit la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, admettant A comme matrice relativement à $B = (i, j, k)$ une base orthonormée de R^3

a) Déterminer la nature géométrique de f et préciser ses éléments caractéristiques.

Soit g la réflexion de plan $2x + y = 0$

b) Déterminer la matrice de g relativement à B.

c) Que dire de $f \circ g \circ f$?

d) Que dire de $g \circ f \circ g$?

LAFAYE DE MICHAUX Antoine

Exercice 1

On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int\limits_0^{+\infty} exp(-t^2)ch(2tx)dt$

1°) Montrer que l'intégrale définissant F est bien convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$

2°) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2xF(x)$

3°) Déterminer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en admettant que $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 2

X vient en cours deux fois sur trois et quand il vient il est en retard une fois sur deux.

Le cours commence et X n'est pas là. Quelle est la probabilité que X vienne ?

ISNARD Nathan

Exercice 1

On pose, pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(P) = |P(a)| + \int\limits_0^1 |P'(t)|\, dt$

1) Montrez que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2) Montrez que, si E est un espace vectoriel normé muni d'une norme N, si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} N(x_n) = N(x)$
3) Pour quelles valeurs de a, la suite des $P_n = (\frac{X}{2})^n$ est-elle convergente pour N_a ?

Exercice 2

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 1$ admet une unique solution que l'on notera a_n, sur $[0, 1]$
2) Montrez que la suite (a_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$
3) Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.