A rendre le jeudi 18 septembre 2026

Devoir à la maison n°1 de Mathématiques

Code couleur :	noir	plutôt facile, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (où complément)
	rouge	assez difficile
	vert	difficile

EXERCICE 1

On remarque que l'on peut facilement partager un carré en 4 carrés et on se pose la question de savoir si on peut partager un carré en n carrés (par forcément de même taille) avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

1°) Partager un carré en 6 carrés, puis 7 carrés, puis 8 carrés, puis 9 carrés et enfin en 10 carrés. Remarque : une figure propre pour chaque cas suffira.

2°) Démontrer que pour tout $n \geq 6$, un carré peut être partagé en n carrés.

3°) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ peut-on diviser un carré en n carrés ?

EXERCICE 2 : CCP 2019 TSI

Dans cet exercice, on étudie l'intégrale $u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)dt$ où $n \in \mathbb{N}$

1°) Calculer u_0, u_1 et u_2.

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3°) Etablir que : $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ pour $n \geq 1$

4°) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$, pour $n \in \mathbb{N}$
Vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.

5°) En déduire que : $(n+1)u_{n+1}^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2$

6°) Donner, à partir de la question précédente, un encadrement de u_n en fonction de n pour $n \geq 1$

7°) En déduire que : $u_n \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$

EXERCICE 3

On pose : $\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

1°) Quelle valeur donnée à α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?

On suppose désormais que α prend la valeur trouvée au 1°)

2°) a) f est-elle dérivable en 0?
2°) b) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?
2°) c) (uniquement $\frac{5}{2}$) f est-elle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$?

On pose $\forall x \in [0;+\infty[$, $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = F(n\pi)$

3°) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Dresser le tableau de variation de F sur $[2k\pi;(2k+2)\pi]$
3°) b) Tracer, très grossièrement, l'allure de la représentation graphique de F

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = (-1)^n \int\limits_0^\pi \frac{sin(t)}{t+n\pi}dt$
On pose aussi : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n = \theta_{2n}$ et $\beta_n = \theta_{2n+1}$

4°) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$
Indication : on pourra effectuer le changement de variable $t = u + k\pi$ dans u_k
4°) b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_n \geq \alpha_n$
4°) c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq \frac{1}{n}$
4°) d) Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
4°) e) Que peut-on en déduire sur la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5°) Montrer que $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^x f(t)dt$ existe et est une limite finie.

EXERCICE 4

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $e - \frac{e}{2n} \leq (1+\frac{1}{n})^n \leq e$