

Feuille d'exercices n°1 : trigonométrie, révisions

Exercice 1. Résoudre dans \mathbb{R} : a) $\sin(x) = \sin(2x)$ b) $\cos(x) = \cos(2x)$
 c) $\cos(x) = \cos(5x)$ d) $\cos(2x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ e) $2\cos^2(x) + 9\cos(x) + 4 = 0$

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, écrire $\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x)$ sous forme de produit.

Exercice 3. a) Exprimer pour $x \in \mathbb{R}$: $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$
 b) Déterminer $\cos(\frac{\pi}{10})$

Exercice 4. Calculer en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ la somme : $S = \sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta)$

Exercice 5. (★)

Soit $(a, b, c) \in [0; \pi]^3$ tel que $a + b + c = \pi$.

On pose $S = \sin^2(a) + \sin^2(b) + \sin^2(c)$

a) Montrer que : $S = 2 - \cos^2(a) + \cos(a)\cos(b - c)$

b) Montrer que : $S \leq \frac{9}{4}$ avec égalité si et seulement si $a = b = c = \frac{\pi}{3}$

Exercice 6. (★) Résoudre dans \mathbb{R} : $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$

Exercice 7. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \ 10^n - (-1)^n$ est divisible par 11

Exercice 8. Démontrer que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 9. Résoudre : $sh(x) = 1$

Exercice 10. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et que $u_5 = 13$ et $u_9 = 25$.

Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^n u_k$.

Exercice 11. a) Montrer que : $\sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$ et en déduire $\sum_{k=0}^n k$

b) Montrer que : $\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$ et en déduire $\sum_{k=0}^n k^2$

c) En simplifiant $(k+1)^4 - k^4$ et en utilisant le a) et le b), calculer $\sum_{k=0}^n k^3$

Exercice 12. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ la somme $S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+3)}$

Exercice 13. Résoudre dans \mathbb{C} : $x^2 + 3ix - 3 + i = 0$

Exercice 14. Soit $u_0 \in]0; +\infty[$. On pose $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Etudier $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 15. Résoudre sur \mathbb{R} :
$$\begin{cases} a) e^x + 1 = \exp(x + 1) \\ b) x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0 \\ c) 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 0 \\ d) \sin(x) = 1 + e^x \end{cases}$$

Exercice 16. Trouver les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ de degré 5, sachant que le reste de la division euclidienne de P par $(X+1)^3$ vaut -5 et que le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^3$ vaut 11.