Feuille d'exercices n°3 : chap. 1

Exercice 27. *Soit la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\forall x \neq 0 \quad f(x) = sin(x)sin(\frac{1}{x})$ *et* $f(0) = 0$.
a) Montrer que f *est continue en* 0. f *est-elle dérivable en 0 ?*
b) Donner l'allure de la représentation graphique de f.

Exercice 28. *Soit* f *une fonction continue, bornée, de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
Montrer que f *admet un point fixe (*$\exists c \in \mathbb{R}\ ,\ f(c) = c$*)*

Exercice 29. *Un cycliste parcours 40km en deux heures. On suppose que sa vitesse et sa position sont des fonctions continues du temps.*
Montrer qu'il y a un intervalle d'une heure pendant lequel le cycliste a parcouru exactement 20km.

Exercice 30. *Soit* f *une fonction continue de* $[a, b]$ *dans lui même. Montrer que* f *admet un point fixe.*

Exercice 31. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 \in]0, \pi[\\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = sin(u_n) \end{cases}$
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 32. *(*$\star$*) (Règle de l'Hospital)*
Soit f *et* g *deux fonctions dérivables sur* $[a, b]$ *telles que :* $g(a) \neq g(b)$ *et* $\forall x \in [a, b] \quad g'(x) \neq 0$
a) Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ *tel que :* $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$
b) En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \mu \in \mathbb{R}$ *alors* $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \mu$
c) Application : Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x-sin(x)}$

Exercice 33. *(*$\star\star$*) (Théorème de Darboux)*
Soit f *une fonction dérivable sur un segment* $[a; b]$.
Montrer que f' *vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.*
(f' *prend toutes les valeurs entre* $f'(a)$ *et* $f'(b)$*)*

Exercice 34. *a) Montrer que :* $\forall x > 0 \quad \frac{1}{x+1} \leq ln(1 + x) - ln(x) \leq \frac{1}{x}$
b) Montrer que au voisinage de $+\infty$ *:* $\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sim ln(n)$

Exercice 35. *Etudier le signe de* $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$

Exercice 36. *Etudier la fonction* $f(x) = arcsin(\frac{e^x}{1+e^x})$.

Exercice 37. *Etudier la fonction* $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 6}$.
On s'appliquera en particulier sur l'étude en 0 et en $+\infty$.

Exercice 38. *(*$\star$*)*
Etudier $f(x) = x^2 \arctan(\frac{1}{1+x})$