Feuille d'exercices n°4 : chap. 1

Exercice 39. *Calculer* $A = \int_0^{\sqrt{\pi}} x sin(x^2)dx$, $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3(x)dx$ *et* $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x cos(x)dx$

Exercice 40. *Déterminer des primitives des fonctions suivantes :*
$f(x) = e^{4x+3}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$, $h(x) = \frac{x^2+x}{\sqrt{x+1}}$ *et* $k(x) = sin(x)e^{2x+1}$

Exercice 41. *Calculer* $A = \int_1^2 \frac{ln(1+t)}{(1+t)^2}dt$

Exercice 42. *a) Déterminer* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *pour que* $\forall x > 0$, $\frac{1}{x+x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x}$
b) Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x+x^2}$ *sur* $]0, +\infty[$.

Exercice 43. *a) Déterminer* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *pour que* $\forall x > 0$, $\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$
b) Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+5x+6}$ *sur* $]0, +\infty$.

Exercice 44. *a) Déterminer une primitive de* $x \mapsto \frac{x^3+3x^2+x+2}{x(x+2)}$
a) Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$

Exercice 45. Lebesgue

Soit f *une fonction de classe* C^1 *sur un segment* $[a;b]$. *Montrer que :* $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b sin(nx)f(x)dx = 0$

Exercice 46. Formule de la moyenne
Soit $f \in C^0([a;b])$. *Montrer que :* $\exists c \in]a;b[\ \int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c)$

Exercice 47. $\star$
Calculer $A = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}dx$

Exercice 48. *Déterminer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\dots(1+\frac{n}{n})}$

Exercice 49. *Pour* $\alpha \geq 0$, *donner un équivalent au voisinage de* $+\infty$ *de* $\sum\limits_{k=1}^n k^\alpha$

Exercice 50. *Calculer* $\int_0^2 \lfloor x^2 \rfloor dx$

Exercice 51. *($\star$)*

Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{E(\sqrt{t})}{t^2}dt \in \mathbb{R}$
Remarque : on peut montrer (pas immédiat et dur) que cette valeur vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 52. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = [(n+1)(n+2)\dots(n+n)]^{\frac{1}{n}}$
Donner un équivalent de u_n.

Exercice 53. *($\star$)*
Soit f *une fonction continue d'un segment de longueur non nulle* $[a;b]$ *dans* $[0;+\infty[$.

Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\int_a^b (f(t))^n dt)^{1/n} = \max\limits_{x \in [a;b]} f(x)$