FORMULAIRE RENTREE

1 Quelques formules de bases pour les calculs

1.1 Les fractions

Théorème . *Soit* $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$ *tels que* $b\neq 0$ *et* $d\neq 0$ *alors :* $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ *et* $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

Si de plus $c\neq 0$ *alors :* $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$

1.2 Les identités remarquables

Théorème . *Soit* $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ *alors:* $\begin{cases}(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\\(a-b)^2=a^2+b^2-2ab\\a^2-b^2=(a-b)(a+b)\end{cases}$

1.3 Exponentielle - logarithme - puissances

Théorème . *Soit* $(a,b)\in]0;+\infty[^2$ *alors* $\begin{cases}ln(ab)=ln(a)+ln(b)\\ln(\frac{a}{b})=ln(a)-ln(b)\\ln(a^b)=bln(a)\end{cases}$

Théorème . *Soit* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *alors :* $exp(a+b)=exp(a)exp(b)$ *et* $exp(a-b)=\frac{exp(a)}{exp(b)}$

Théorème . *Soit* $(a,c)\in]0;+\infty[$, $b\in\mathbb{R}$ *alors :* $\begin{cases}a^0=1\\a^b=exp(bln(a))\\a^ba^c=a^{b+c}\\\left(a^b\right)^c=a^{bc}\\(ac)^b=a^bc^b\end{cases}$

2 Trigonométrie

Les **courbes** représentatives des fonctions sinus, cosinus et tangente sont à connaître.

2.1 Ensembles de définition et dérivées

- $\forall t\in\mathbb{R},\quad \cos^2(t)+\sin^2(t)=1$
  - cos et sin sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout entier naturel n et tout réel t :
    $\cos^{(n)}(t)=\cos\left(t+n\frac{\pi}{2}\right)\qquad \sin^{(n)}(t)=\sin\left(t+n\frac{\pi}{2}\right)$
  - tan est définie sur $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}I_k$ où $I_k=\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$
  - tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D et $\forall t\in D,\quad \tan'(t)=1+\tan^2(t)=\frac{1}{\cos^2(t)}$

2.2 Formules d'Euler

$\forall t\in\mathbb{R}$, $e^{it}=\cos(t)+i\sin(t)$, $e^{-it}=\cos(t)-i\sin(t)$, $\cos(t)=\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)$ $\sin(t)=\frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)$

2.3 Valeurs remarquables

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

2.4 Formules d'addition

$\sin(a+b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a)$ $\qquad$ $\sin(a-b) = sin(a)cos(b) - sin(b)cos(a)$

$\cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(b)sin(a)$ $\qquad$ $\cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(b)sin(a)$

(sous réserve que chaque terme existe) : $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

Pour tout réel t et tout entier naturel n : $\cos(nt) = Re\left[\left(\cos(t)+i\sin(t)\right)^n\right]$ et $\sin(nt) = Im\left[\left(\cos(t)+i\sin(t)\right)^n\right]$

2.5 Formules de duplication

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} \cos(2t) = cos^2(t) - sin^2(t) = 1 - 2sin^2(t) = 2cos^2(t) - 1 \\ \sin(2t) = 2sin(t)cos(t) \end{cases}$$

2.6 Angle moitié

(sous réserve que chaque terme existe)

$$\cos(t) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \qquad \sin(t) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \qquad \tan(t) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$1+e^{it} = e^{it/2}\left(e^{-it/2}+e^{it/2}\right) = 2e^{it/2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \qquad 1-e^{it} = e^{it/2}\left(e^{-it/2}-e^{it/2}\right) = -2ie^{it/2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

2.7 Période, antipériode

cos et sin sont 2π-périodiques, tan est π-périodique.

Pour tout réel t et tout entier relatif k : $\begin{cases} \sin(t+k\pi) = (-1)^k\sin(t) \\ \cos(t+k\pi) = (-1)^k\cos(t) \\ \tan(t+k\pi) = \tan(t) \end{cases}$

2.8 Arcs associés

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \cos(t) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \sin(t) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \frac{1}{\tan(t)} \quad (t \in \mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = \cos(t) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = -\sin(t) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = \frac{-1}{\tan(t)} \quad (t \in \mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z})$$

$$\sin\left(\pi-t\right) = \sin(t) \qquad \cos\left(\pi-t\right) = -\cos(t) \qquad \tan\left(\pi-t\right) = -\tan(t) \quad (t \in \mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z})$$

2.9 Formules de linéarisation (transformation de produits en sommes)

$$\begin{cases} \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(cos(a+b) + cos(a-b)\right) \\ \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(cos(a-b) - cos(a+b)\right) \\ \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(sin(a+b) + sin(a-b)\right) \end{cases}$$

2.10 Transformations de sommes en produits

$$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)-\sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2.11 Équations trigonométriques

Étant donné un réel α, alors :

équation (d'inconnue x)	ensemble des solutions
$\sin(x) = \sin(\alpha)$	$S = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\cos(x) = \cos(\alpha)$	$S = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\tan(x) = \tan(\alpha)$	$S = \{\alpha + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3 Formules de dérivations

- Les formules $\big(cte\big)' = 0$, $\big(x\big)' = 1$, $\big(x^2\big)' = 2x$, $\big(x^3\big)' = 3x^2$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$, $\big(\sqrt{x}\big)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sont toutes résumées par l'unique formule
$(x^n)' = nx^{n-1}$
- Soient λ, μ deux réels, u, v deux fonctions dérivables.
$\big(\lambda u + \mu v\big)' = \lambda u' + \mu v'$ $\quad \big(uv\big)' = u'v + uv'$ $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$(e^u)' = u' \times e^u$ $\quad \big(\ln(u)\big)' = u' \times \dfrac{1}{u}$ $\quad \left(\dfrac{1}{u}\right)' = u' \times \dfrac{-1}{u^2}$ $\quad \big(\sqrt{u}\big)' = u' \times \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$
$(u^2)' = u' \times 2u$ $\quad (u^3)' = u' \times 3u^2 \ldots$

4 Croissances comparées

Proposition (Croissances comparées)

- Pour tous réels strictement positifs α et β, on a

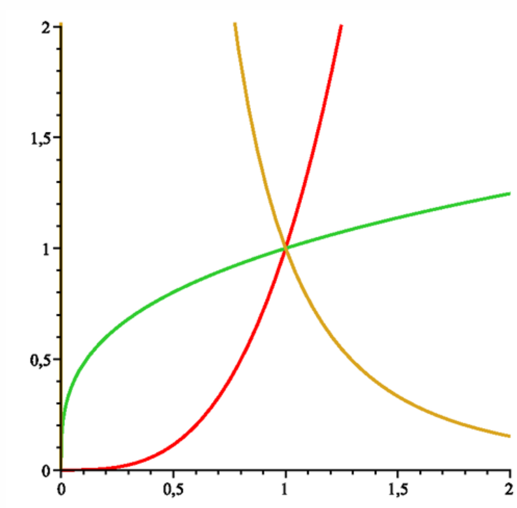
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$$

- Pour tout réel a strictement supérieur à 1 et tout réel α, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x |x|^\alpha = 0$$

5 Fonctions puissances

Fonctions puissance



$\alpha \geqslant 1$:

Valeur de x	0 1 $+\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$	
Variations de x^α	

$0 \leqslant \alpha < 1$:

Valeur de x	0 1 $+\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$	
Variations de x^α	

$\alpha < 0$:

Valeur de x	0 1 $+\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$	
Variations de x^α	