

Chapitre 1 (et 0) : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé exercice 1.1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $\cos(2x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

Correction

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \sin(x + \frac{\pi}{4}) \\ \Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{2}) &= \sin(x + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2} = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x + \frac{\pi}{2} = \pi - (x + \frac{\pi}{4}) + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k'\pi}{3}, k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation cherchée est donc $S = \{ \frac{-\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \frac{\pi}{4} + \frac{2k'\pi}{3}, k' \in \mathbb{Z} \}$

Enoncé exercice 1.2

Linéariser $\cos^3(x)$

Correction

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} ((e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix} (e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3) = \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{8} (2\cos(3x) + 3 \times 2\cos(x)) \end{aligned}$$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^3(x) = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$

Enoncé exercice 1.3

Effectuer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+\sin(x)}$

Correction

$$\begin{aligned} \text{Au voisinage de } 0 : & \frac{1}{1+\sin(x)} \\ &= \frac{1}{1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\ &= 1 - (x - \frac{x^3}{6}) + (x - \frac{x^3}{6})^2 - (x - \frac{x^3}{6})^3 + o(x^3) = 1 - (x - \frac{x^3}{6}) + (x^2) - (x^3) + o(x^3) = 1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

Au voisinage de 0, on a donc : $\frac{1}{1+\sin(x)} = 1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$

Enoncé exercice 1.4

Soit f une fonction continue d'un segment $I = [a; b]$ non vide $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(I) \subset I$.
Montrer qu'il existe $c \in I$, $f(c) = c$

Correction

On pose $\forall x \in I$, $g(x) = f(x) - x$, alors g est continue comme composée de fonctions continues.
 $g(a) = f(a) - a \geq 0$ puisque $f(a) \in I = [a; b] \Rightarrow f(a) \geq a$
 $g(b) = f(b) - b \leq 0$ puisque $f(b) \in I = [a; b] \Rightarrow f(b) \leq b$

On a donc $g(a)g(b) \leq 0$ et comme g est continue sur I alors $\exists c \in I$, $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$

Enoncé exercice 1.5

Etudier la fonction $f(x) = \frac{(x-2)e^x}{1+e^x}$ et tracer sa représentation graphique Γ_f

Correction

On commence par remarque que le **domaine de définition** de f est $\mathbb{R}$ et que f est C^∞ sur son domaine.

On a alors :

$$f'(x) = \frac{[(x-2)e^x + e^x](1+e^x) - e^x(x-2)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} [(x-1)(1+e^x) - (x-2)e^x] = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} (x-1+e^x)$$

On remarque que $f'(x)$ est du même signe que $\theta(x) = e^x + x - 1$

θ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\theta'(x) = e^x + 1 > 0$ donc θ est croissante. On a alors, puisque $\theta(0) = 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\theta(x)$		0	$+\infty$
$\theta(x)$	-	0	+

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

On peut alors dire, avec le tableau de variation que :
 Γ_f admet une tangente horizontale au point $(0; -1)$
 Γ_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$

Etude approfondie en $+\infty$:

Au voisinage de $+\infty$: $f(x) = \frac{(x-2)e^x}{1+e^x} \sim \frac{(x-2)e^x}{e^x} = x - 2$

On peut alors étudier $f(x) - (x - 2) = \frac{(x-2)e^x}{1+e^x} - (x - 2) = \frac{(x-2)e^x - (x-2)(1+e^x)}{1+e^x} = \frac{2-x}{1+e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

La courbe Γ_f se rapproche donc de la droite d'équation $y = x - 2$ au voisinage de $+\infty$. On dit que cette droite est asymptote oblique à Γ_f en $+\infty$

De plus $f(x) - (x - 2) = \frac{2-x}{1+e^x} \begin{cases} > 0 \text{ si } x < 2 \\ < 0 \text{ si } x > 2 \end{cases}$

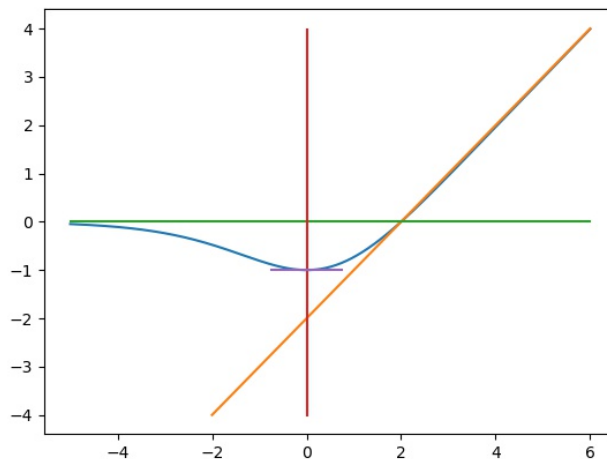
Donc Γ_f au dessus de $y = x - 2$ sur $] -\infty; 2]$ et Γ_f au dessous de $y = x - 2$ sur $]2; +\infty[$

On peut maintenant tracer la courbe avec Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    e=np.exp(x)
    return (x-2)*e/(1+e)

X=np.linspace(-5,6,500) # création des abscisses
Y=[f(x) for x in X] # création des ordonnées
plt.plot(X,Y) # tracé de Gamma_f
plt.plot([-2,6],[-4,4]) # tracé de l'asymptote
plt.plot([-5,6],[0,0]) # tracé de l'axe des x
plt.plot([0,0],[-4,f(6)]) # tracé de l'axe des y
plt.plot([-0.75,0.75],[-1,-1]) # tracé de la tangente horizontale
plt.show()
```



Enoncé exercice 1.6

Etude en 0 de $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \arcsin(1 - x^2)$

Correction

• : Rappelons que $\arcsin$ est définie sur $[-1; 1]$, continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] - 1; 1[$ avec $\forall u \in] - 1; 1[, \arcsin'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

Comme $x \mapsto 1 - x^2$ est C^∞ sur $[-1; 1]$ et envoie $[-1; 1]$ sur $[0; 1] \subset [-1; 1]$ alors, par composition f est continue sur $[-1; 1]$

$1 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ donc, comme $x \mapsto 1 - x^2$ envoie $[-1; 1] \setminus \{0\}$ sur $[0; 1[\cup] - 1; 1[$ alors, par composition f est dérivable sur $[-1; 1] \setminus \{0\}$

• Sur $[-1; 1] \setminus \{0\}$ on a : $f'(x) = (-2x) \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$

Considérons g la restriction de f à $[0; 1]$, alors g est continue sur $[0; 1]$, dérivable sur $]0; 1[$ et $\forall x \in]0; 1[, g'(x) = \frac{-2x}{x\sqrt{2-x^2}} = \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\sqrt{2}$

Par le théorème de prolongement de la fonction dérivée, on en déduit g dérivable en 0 et $g'(0) = -\sqrt{2}$
En revenant à f on a f dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\sqrt{2}$

Comme f est paire (ou en appliquant le même raisonnement, on a f dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \sqrt{2}$)

Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0.

Enoncé exercice 1.7

Déterminer, sur son domaine, une primitive de $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

Correction

On remarque que : $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ donc le domaine de f est $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$
Pour $x \in D$ on a : $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \Leftrightarrow x+1 = a(x-2) + b(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2a - b \\ 1 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Donc sur D , $f(x) = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$ et

une primitive de f sur D est par exemple : $F(x) = -2\ln(|x-1|) + 3\ln(|x-2|)$