

Chapitre 1 : Révisions et compléments d'analyse

Dans ce chapitre, on revoit des notions de première année, concernant l'étude locale et globale des fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On complètera aussi la partie calcul intégral. Ce n'est cependant pas un résumé du cours de première année.

1 Propriétés vérifiées sur une partie

1.1 Préliminaire

Définition. Soit f une fonction définie sur un ensemble A et B une partie de A . Alors on dit que f vérifie une certaine propriété P sur B si et seulement si $f|_B$ vérifie P sur B .

Exemple. $\ln(x) \geq 0$ sur $]1; +\infty[$

1.2 Point adhérent

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Alors on dit que : a est **adhérent** à A si et seulement si a est limite d'une suite d'éléments de A .

Remarque. On a pas forcément $a \in A$.

Par contre si $a \in A$ alors a est adhérent à A (a est la limite de la suite constante égale à a).

Exemples. 0 est **adhérent** à $[0; 1]$.

0 est **adhérent** à $]0; 1[$.

0 est **adhérent** à $\{\frac{1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

0 **n'est pas adhérent** à $]1; +\infty[$

1.3 Propriété au voisinage d'un point

Définition. Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$.

Soit a un point adhérent à A .

Cas 1 : $a \in \mathbb{R}$

On dit que f vérifie une propriété P au voisinage de a

si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que f vérifie P sur $]a - \epsilon; a + \epsilon[\cap A$

Cas 2 : $a = +\infty$

On dit que f vérifie une propriété P au voisinage de $+\infty$

si et seulement si il existe M tel que f vérifie P sur $]M; +\infty[\cap A$

Cas 3 : $a = -\infty$

On dit que f vérifie une propriété P au voisinage de $-\infty$

si et seulement si il existe M tel que f vérifie P sur $] -\infty; M[\cap A$

Exemples. $\sin(x) \geq 0$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$

$\exp(x) \geq x^{139}$ au voisinage de $+\infty$

1.4 Exemple de propriété globale : fonction bornée sur une partie

Définition. Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors, on dit que : f est bornée sur A si et seulement si $\exists M > 0, \forall x \in A, |f(x)| \leq M$

1.5 Exemple de propriété locale : limite en un point

Définition. Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et soit a un point adhérent à A .

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Alors on dit que f tend vers λ lorsque x tend vers a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lambda$ si et seulement si

cas 1 : $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \mid \forall x \in A \mid x - a \mid < \eta \Rightarrow \mid f(x) - \lambda \mid < \epsilon$$

cas 2 : $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda = +\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \eta > 0 \mid \forall x \in A \mid x - a \mid < \eta \Rightarrow \mid f(x) \mid > M$$

cas 3 : $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda = -\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \eta > 0 \mid \forall x \in A \mid x - a \mid < \eta \Rightarrow \mid f(x) \mid < M$$

cas 4 : $a = +\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A \mid x > M \Rightarrow \mid f(x) - \lambda \mid < \epsilon$$

cas 5 : $a = +\infty$ et $\lambda = +\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} \mid x \geq M \Rightarrow f(x) \geq A$$

cas 6 : $a = +\infty$ et $\lambda = -\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} \mid x \geq M \Rightarrow f(x) \leq A$$

cas 7 : $a = -\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A \mid x < M \Rightarrow \mid f(x) - \lambda \mid < \epsilon$$

cas 8 : $a = -\infty$ et $\lambda = +\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} \mid x \leq M \Rightarrow f(x) \geq A$$

cas 9 : $a = -\infty$ et $\lambda = -\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} \mid x \leq M \Rightarrow f(x) \leq A$$

2 Continuité, dérivabilité

2.1 Continuité en un point

Définition. Soit f une fonction de I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Alors on dit que : f est continue en a si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Remarque. En général, on ne revient pas à la définition mais on utilise les propriétés vues en première année, comme par exemple, la somme, le produit ou la composée de deux fonctions continues est continue, etc..
La continuité en un point est une propriété **locale**.

2.1.1 Continuité à gauche et à droite

Définitions. Soit f une fonction de I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Alors on dit que :

f est continue à droite en a si et seulement si, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$

f est continue à gauche en a si et seulement si, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

2.2 Nombre dérivé

2.2.1 Nombre dérivé en un point

Définition. Soit f une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Alors, si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est réelle alors $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé **nombre dérivé de f en a** et on dit que **f est dérivable en a** .

Remarque. C'est une notion locale.

2.2.2 Nombre dérivé en un point, à droite et à gauche

Définitions. Soit f une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Alors, si $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est réelle alors $f'_g(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé nombre dérivé à gauche de

f en a et on dit que f est dérivable gauche en a .

Si $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est réelle alors $f'_d(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé nombre dérivé à droite de f en a et on dit que f est dérivable à droite en a .

2.2.3 Propriété

Propriété. Si f est dérivable en a alors f est continue en a .

Si f est dérivable à gauche en a alors f est continue à gauche en a .

Si f est dérivable à droite en a alors f est continue à droite en a .

preuve : Cf cours de première année

Remarque. Réciproque fausse

2.3 Dérivée de la réciproque

Propriété. Si f est bijective de I dans J . Soit $a \in I$ et $b = f(a)$

Alors si f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$, on a f^{-1} dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}$

Remarque. On peut retrouver cette formule en dérivant : $f(f^{-1}(b)) = b$ par rapport à b

Preuve :

2.4 Passage à une définition globale

Définition. Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de A .

Alors on pose :
$$\begin{array}{ccc} f' : A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$
 f' est alors appelée *fonction dérivée de f*

Remarques. Si f' est dérivable sur A alors on note f'' ou $f^{(2)}$ sa fonction dérivée.

On peut ainsi définir les dérivées successives de f par la relation de récurrence : $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

Les fonctions de classe C^k sur A sont les fonctions k fois dérivables et de dérivée k -ième continue.

Une fonction de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ est dite de classe C^∞ .

3 Etude locale : comparaison de fonctions

3.1 Définitions

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f et g deux fonctions définies sur I une partie de $\mathbb{R}$ et soit a un point adhérent de I . On suppose de plus que : $\forall x \in I, g(x) \neq 0$.

Alors, on dit que :

f est **équivalente** à g au voisinage de a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

f est **négligeable** devant g au voisinage de a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

f est **dominée** par g au voisinage de a si et seulement si $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a

3.2 Notations

Avec les notations précédentes :

- si f est équivalente à g au voisinage de a on note : $f(x) \underset{x=a}{\sim} g(x)$ ou simplement $f(x) \sim g(x)$
- si f est négligeable devant g au voisinage de a on note : $f(x) = \underset{x=a}{o}(g(x))$ ou simplement $f(x) = o(g(x))$
- si f est dominée par g au voisinage de a on note : $f(x) = \underset{x=a}{O}(g(x))$ ou simplement $f(x) = O(g(x))$

Remarques. Il n'y a pas d'équivalent à la fonction nulle.

On ne peut pas, en général, ajouter deux équivalents.

On peut multiplier ou diviser deux équivalents.

On ne peut pas, en général, composer deux équivalents.

$f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a s'écrit aussi : il existe une fonction ϵ définie au voisinage de a telle que, au voisinage de a : $f(x) = \epsilon(x)g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 1$. (ceci permet d'étudier le cas où g s'annule au voisinage de a)

3.3 Propriété

Lemme. Pour f et g deux fonctions définies au voisinage de a :

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \iff f(x) \sim g(x)$$

preuve :

Exemple. Au voisinage de 0 : $f(x) = x + x \sin(x) \Rightarrow f(x) = x + o(x) \Rightarrow f(x) \sim x$

3.4 Développements limités

3.4.1 Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I un voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Alors, on dit que f admet un développement limité en a à l'ordre n , si et seulement si,

il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :
$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Remarques. Un développement limité est unique et il faut connaître par coeur les développements limités usuels.

On peut ajouter, diviser, multiplier, composer des DL et en déduire des équivalents.

3.4.2 DL usuels

Pour x au voisinage de 0, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

3.4.3 Formule de Taylor-Young

Théorème . Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^n au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Alors f admet en a un développement limité d'ordre n donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

preuve : cf cours de première année

3.4.4 Exemples

DL en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\cosh(x)} = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

DL en $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 2 de $g(x) = \tan(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} - \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3}) - (x - \frac{\pi}{3})^2 + o((x - \frac{\pi}{3})^2)$.

4 Etude globale

4.1 Théorème des valeurs intermédiaires

4.1.1 Enoncé

Théorème . Soit $[a, b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Alors si $f(a)f(b) < 0$ on a $\exists c \in [a, b]$ tel que : $f(c) = 0$.

Remarque. Autrement dit : $\forall d \in [f(a); f(b)]$, $\exists c \in [a; b]$, $f(c) = d$

4.1.2 Preuve

4.1.3 Exemple

- a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [0, +\infty[$, $x_n + \sin(x_n) = n$
- b) Etudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

4.2 Théorème des bornes atteintes

4.2.1 Enoncé

Théorème . Soit $[a, b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[a; b]$, c'est-à-dire qu'il existe c_m et c_M deux éléments de $[a, b]$ tels que : $\forall x \in [a; b]$ $f(c_m) \leq f(x) \leq f(c_M)$

Remarque. On peut dire que l'image d'un intervalle fermé borné par une application continue est un intervalle fermé borné.

On a alors $f([a; b]) = [f(c_m); f(c_M)]$.

preuve : preuve HP

4.2.2 Exemple

Montrer que : $f : x \mapsto x^2 e^{-x} \cos(x^2 + 1)$ est bornée sur $I = [0, +\infty[$

4.3 Théorème des accroissements finis

4.3.1 Enoncé

Théorème . Soit $[a, b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Alors si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ on a : $\exists c \in]a; b[$ tel que : $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

4.3.2 Preuve

4.3.3 Inégalité des accroissements finis

Théorème . Dans le cadre du théorème ci-dessus, si on a :

$\forall x \in]a; b[$ $|f'(x)| \leq M$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$

4.3.4 Preuve

4.3.5 Interprétations

Pour le cas d'égalité et le cas d'inégalité.

4.3.6 Exemple

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$

4.4 Monotonie

Définitions. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Alors on dit que f est croissante sur I si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Alors on dit que f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Alors on dit que f est décroissante sur I si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Alors on dit que f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Théorème : Si f est une fonction dérivable sur un segment I alors :

$\forall x \in I, f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ est croissante sur I

$\forall x \in I, f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ est décroissante sur I

$\forall x \in I, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I

$\forall x \in I, f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I

preuve : cf cours de première année

4.5 Théorème de la limite de la dérivée

4.5.1 Enoncé

Théorème . Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Alors, si f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$

alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lambda$

Remarques. f' est alors continue en a .

Si λ vaut $+\infty$ ou $-\infty$ alors f admet une tangente verticale en $(a, f(a))$ et n'est pas dérivable en a .

4.5.2 Preuve

4.5.3 Exemple

Etude en 0 de $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \arcsin(1 - x^2)$

5 Représentation graphique d'une fonction

5.1 Préliminaires, notations

Dans cette section on notera f une fonction de I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in I\}$. Γ_f est appelé représentation graphique de f .

Remarque. On gardera ces notations pour la suite de la section.

5.2 Parité

Définitions. Soit f une fonction à valeurs réelles définies sur une partie I de $\mathbb{R}$.

Alors, si I est centré en 0 et si $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$, on dit que : f est paire.

Alors, si I est centré en 0 et si $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$, on dit que : f est impaire.

Remarque. I est centré en 0 $\Leftrightarrow \forall x \in I, -x \in I$

Lemme. Si f est paire, alors Γ_f est symétrique par rapport à l'axe Oy .

Si f est impaire, alors Γ_f est symétrique par rapport à O .

5.3 Tangente

Rappel : Si f est dérivable en a alors :

la droite d'équation cartésienne : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ est appelée **tangente à Γ** au point $(a, f(a))$.

DESSIN :

Remarques. On peut étudier la position relative de la courbe et de sa tangente avec les DL .

La tangente est la représentation graphique de l'approximation de f à l'ordre 1, au voisinage de a . C'est la droite passant par $(a, f(a))$, de coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple. Tangente à $f : x \mapsto \ln(1 + \sin(e^x - 1))$ au point d'abscisse 0.

5.4 Convexité

5.4.1 Définition

Définition. Soit f une fonction à valeurs réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors on dit que : f est convexe sur I

si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2 \ \forall \lambda \in [0, 1] \ , \ f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$

DESSIN :

Interprétation : la courbe est au dessous de ses cordes

5.4.2 Position de la courbe par rapport à sa tangente

Propriété. Si f est une fonction convexe dérivable sur I alors la représentation graphique de f est **au dessus de ses tangentes**.

preuve : cf sup

5.4.3 Cas des fonctions deux fois dérivables

Propriété. Si f est deux fois dérivable sur I et si $f''(x) \geq 0$, alors f est convexe sur I .

preuve : cf sup

Remarque : si f est simplement dérivable alors on a f' croissante

Exemple : $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$

5.4.4 Exemple d'inégalité de convexité

Exercice. $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] \ , \ \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$ et $\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2 \ , \ \ln(\frac{x+y}{2}) \geq \frac{1}{2} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(y)$

5.5 Exemple d'étude de fonction

Etude de $f(x) = \frac{(x-2)\exp(x)}{1+\exp(x)}$

6 Calculs de primitives et d'intégrales

6.1 Primitives

Définition. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie I de $\mathbb{R}$. Alors on dit que : F est une primitive de f sur I , si et seulement si, F est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Lemme. 1

Sur un intervalle, deux primitives diffèrent d'une constante.

Lemme. 2

Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors f **admet** une primitive sur I .

preuve : Cf cours de première année

Notations : On note $\int f(x)dx$ ou $\int f$ une primitive quelconque de f .

6.2 Primitives usuelles

$$\begin{aligned}\int \sin(x)dx &= -\cos(x) & \int \cos(x)dx &= \sin(x) \\ \int \sinh(x)dx &= \cosh(x) & \int \cosh(x)dx &= \sinh(x) \\ \int \frac{1}{x}dx &= \ln(|x|) & \forall n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \arcsin(x) & \int \frac{1}{1+x^2}dx &= \arctan(x)\end{aligned}$$

6.3 Intégrales

Définition. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I .

Alors on pose : $\forall (a, b) \in I^2, \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

On dit que $\int_a^b f(x)dx$ est l'intégrale de f entre a et b . Cette valeur ne dépend pas du choix de la primitive F .

Exemple. $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx$

6.4 Changement de variable

Lemme. Soit $I = [a, b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$, ϕ une fonction dérivable sur I et f une fonction continue sur $\phi(I)$. Alors :

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du$$

Remarque. On dit que l'on a effectué le changement de variable $u = \phi(t)$.

preuve :

Exemple. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x+x}} dx$

6.5 Intégration par parties

Lemme. Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soient f et g deux fonctions dérivables sur I .

$$\text{Alors : } \int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

preuve :

Exemple. $\int_0^1 (x-1)e^{2x} dx$

6.6 Sommes de Riemman

Théorème . Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

preuve : cf première année

Exemple : $\sum_{k=0}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$

7 Compléments de calcul intégral

Dans ce paragraphe, les fonctions sont à valeurs dans K avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

Le but est de généraliser la notion d'intégrale que l'on vient de revoir.

7.1 Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition. On dit qu'une fonction f définie sur un segment $[a; b]$ est **continue par morceaux sur $[a; b]$** s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i; a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction continue sur $[a_i; a_{i+1}]$.

Remarques. On dit alors que la subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ est adaptée à f

Le nombre de discontinuité de f est finie.

Une fonction continue est continue par morceaux.

Les fonctions en escalier sont continues par morceaux.

7.2 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est **continue par morceaux sur I** si pour tout segment $[a; b] \subset I$, la restriction de f à $[a; b]$ est continue par morceaux sur $[a; b]$.

7.3 Exemples

7.4 Propriété

Proposition. Si I est intervalle de $\mathbb{R}$ alors l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I est un K espace vectoriel.

Remarques. On note parfois $C_{PM}^0(I)$ cet ensemble.

Le produit de deux fonctions continues par morceaux sur I est continue par morceaux sur I .

7.5 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Définition. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$ et $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ une subdivision adaptée à f .

Alors on pose $\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$

avec $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$ l'intégrale de la restriction de f à $]a_k; a_{k+1}[$ prolongée par continuité sur $[a_k; a_{k+1}]$.

Remarques. Cette valeur est aussi notée $\int_{[a; b]} f$ ou encore $\int_a^b f$, elle est indépendante de la subdivision adaptée à f .

On pose $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$ (et donc $\int_a^a f(t) dt = 0$)

Interprétation

7.6 Propriétés

Ce sont presque les mêmes que celles vues en premières années pour l'intégrale des fonctions continues ...

7.6.1 Linéarité de l'intégration

Propriété. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

7.6.2 Partie réelle, partie imaginaire

Propriété. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$.

Alors $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont continues par morceaux sur $[a; b]$ et $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$

7.6.3 Positivité et croissance de l'intégration des fonctions réelles

Proposition. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

- $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \geq 0$
- $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

7.6.4 Inégalité de la moyenne

Proposition. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors $|f|$ est continue par morceaux sur $[a; b]$ et $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

7.6.5 Relation de Chasles

Proposition. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$.

Soient a, b et c dans I . Quel que soit l'ordre de a, b, c on a $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$

7.7 Théorème de l'intégrale nulle

Avertissement : le théorème de l'intégrale nulle ci-dessous, n'est valable que pour les fonctions continues et pas pour les fonctions continues par morceaux.

Théorème . Soit a et b deux réels vérifiant $a < b$ et f une application **CONTINUE** de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a; b] \\ \forall t \in [a; b], f(t) \geq 0 \\ \int_a^b f(t) dt = 0 \end{array} \right. \Rightarrow f \text{ est nulle sur } [a; b]$$

Sommaire

1	Propriétés vérifiées sur une partie	1
1.1	Préliminaire	1
1.2	Point adhérent	1
1.3	Propriété au voisinage d'un point	1
1.4	Exemple de propriété globale : fonction bornée sur une partie	1
1.5	Exemple de propriété locale : limite en un point	1
2	Continuité, dérivabilité	3
2.1	Continuité en un point	3
2.1.1	Continuité à gauche et à droite	3
2.2	Nombre dérivé	3
2.2.1	Nombre dérivé en un point	3
2.2.2	Nombre dérivé en un point, à droite et à gauche	3
2.2.3	Propriété	3
2.3	Dérivée de la réciproque	3
2.4	Passage à une définition globale	4
3	Etude locale : comparaison de fonctions	4
3.1	Définitions	4
3.2	Notations	4
3.3	Propriété	4
3.4	Développements limités	4
3.4.1	Définition	4
3.4.2	DL usuels	5
3.4.3	Formule de Taylor-Young	5
3.4.4	Exemples	5
4	Etude globale	6
4.1	Théorème des valeurs intermédiaires	6
4.1.1	Enoncé	6
4.1.2	Preuve	6
4.1.3	Exemple	6
4.2	Théorème des bornes atteintes	6
4.2.1	Enoncé	6
4.2.2	Exemple	6
4.3	Théorème des accroissements finis	6
4.3.1	Enoncé	6
4.3.2	Preuve	6
4.3.3	Inégalité des accroissements finis	6
4.3.4	Preuve	6
4.3.5	Interprétations	6
4.3.6	Exemple	6
4.4	Monotonie	7
4.5	Théorème de la limite de la dérivée	7
4.5.1	Enoncé	7
4.5.2	Preuve	7
4.5.3	Exemple	7
5	Représentation graphique d'une fonction	7
5.1	Préliminaires, notations	7
5.2	Parité	7
5.3	Tangente	8
5.4	Convexité	8
5.4.1	Définition	8
5.4.2	Position de la courbe par rapport à sa tangente	8
5.4.3	Cas des fonctions deux fois dérivables	8
5.4.4	Exemple d'inégalité de convexité	8
5.5	Exemple d'étude de fonction	8
6	Calculs de primitives et d'intégrales	9
6.1	Primitives	9
6.2	Primitives usuelles	9
6.3	Intégrales	9
6.4	Changement de variable	9
6.5	Intégration par parties	9
6.6	Sommes de Riemman	10
7	Compléments de calcul intégral	10
7.1	Fonctions continues par morceaux sur un segment	10
7.2	Fonctions continues par morceaux sur un intervalle	10
7.3	Exemples	10
7.4	Propriété	10
7.5	Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux	10
7.6	Propriétés	11
7.6.1	Linéarité de l'intégration	11
7.6.2	Partie réelle, partie imaginaire	11
7.6.3	Positivité et croissance de l'intégration des fonctions réelles	11
7.6.4	Inégalité de la moyenne	11
7.6.5	Relation de Chasles	11
7.7	Théorème de l'intégrale nulle	11