Feuille d'exercices n°5 : chap. 2

Exercice 54. *Démontrer que :* $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

En déduire que : $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k b^{2n-k}$

Exercice 55. *Simplifier la somme* $\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k})$

Exercice 56. *Calculer, pour* $n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}$

Exercice 57. *Pour* $n > 1$ *fixé, calculer :* $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$, $B = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)$ *et* $C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j|$

Exercice 58. ($\star$)

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\sum_{k=1}^{n} x_k = n$ *et* $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$

Montrer que tout les x_k *valent 1.*

Exercice 59. *On pose :* $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n = \frac{2}{n^3+6n^2+11n+6}$

a) Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *tel que :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$

b) La série $\sum u_n$ *est-elle convergente ? Si oui, calculer sa somme.*

Exercice 60. *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *fixé. On pose :* $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ *et* $R_n = cos(x) - S_n$

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad cos^{(k)}(x) = cos(x + k\frac{\pi}{2})$

b) Calculer $cos^{(2k)}(0)$ *et* $cos^{(2k+1)}(0)$

c) A l'aide de la formule de Taylor, donner une expression intégrale de R_n.

d) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = cos(x)$

Exercice 61. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = sh(\frac{1}{n^{1/3}}) - sin(\frac{1}{n^{1/3}})$.

Donner un équivalent simple de u_n*, puis étudier la convergence de* $\sum u_n$

Exercice 62. *On pose :* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = exp(sin(exp(2n)))\frac{1}{n^2+3n+7}$

Etudier la nature de $\sum u_n$ *en utilisant la règle de comparaison.*

Exercice 63. *Etudier la nature de* $\sum u_n$ *dans les cas suivants :*

a) $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$	*b)* $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$	*c)* $u_n = \frac{1}{ln(1+n^2)}$
d) $u_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}$	*e)* $u_n = cos(n)$	*f)* $u_n = (\frac{1}{2})^{\sqrt{n}}$
g) $u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$	*h)* $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$	*i)* $u_n = \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$
j) $u_n = \frac{cos(n^2\pi)}{nln(n)}$	*k)* $u_n = (\frac{1}{n})^{1+\frac{2}{n}}$	*l)* $u_n = \frac{(-1)^n ln(n)}{n}$
m) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{sin^3(x)}{1+x}dx$	*n)* $u_n = \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$	*o)* $u_n = \frac{n!}{n^n}$