Feuille d'exercices n°6 : chap. 2

Exercice 64. *Déterminer la nature de* $\sum u_n$ *avec* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & si\ \exists k \in \mathbb{N}\ ,\ n = k^2 \\ 0 & sinon \end{cases}$

Exercice 65. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - ln(n)$

a) Donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ *au voisinage de* $+\infty$

b) Montrer que la suite (u_n) *est convergente.*

c) En déduire l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ *tel que :* $ln(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \gamma + o(1)$

d) En déduire un équivalent simple de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

e) Etudier la nature de $\sum \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n^2}$ *et* $\sum \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n}$

Exercice 66. *Etudier :* $\lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{k^2+2k}{k^2-1}$

Exercice 67. *A) Etudier la convergence de la série* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

B) On pose $\forall n \geq 2 \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ *et* $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

a) Montrer que $v_n \sim u_n$*. Peut-on en déduire la convergence de* $\sum v_n$ *?*

b) La série $\sum v_n$ *est-elle absolument convergente ?*

On pose $w_n = v_n - u_n$

c) Donner un équivalent en $+\infty$ *de* w_n

d) Quelle est la nature de $\sum w_n$ *?*

e) Déterminer la nature de $\sum v_n$

f) Méditer sur la règle de l'équivalent.

Exercice 68. *Déterminer suivant* $a \in \mathbb{R}$ *la nature de* $\sum \frac{a^n n^2}{n^3+1}$

Exercice 69. *Déterminer suivant les valeurs de* a *et* b *dans* $\mathbb{R}$ *la nature de* $\sum u_n$ *avec* $u_n = e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}$

Exercice 70. *Etudier suivant* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *la convergence de la série de terme générale :* $u_n = ln(n) + aln(n+1) + bln(n+2)$

Exercice 71. *(⋆ Série de Bertrand)*
Déterminer suivant $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *la nature de* $\sum \frac{1}{n^\alpha (ln(n))^\beta}$

Exercice 72. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = sin(\pi\sqrt{1+n^2})$

a) Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

b) Déterminer la nature de $\sum u_n$ *en effectuant un développement asymptotique de* u_n *suffisamment précis.*