Feuille d'exercices n°7 : chap. 2

Exercice 73. *Calculer* $\alpha = 6,31313131313131313131313131313131....$

Exercice 74. *Calculer le produit de Cauchy de* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ *avec elle même et en déduire* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(\frac{1}{2})^n$

Exercice 75. *a) Montrer que* $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ *est convergente. Quel est le signe de S ?*

b) Déterminer N (le plus petit possible) pour que $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ *soit une valeur approchée de S à* 10^{-2} *près.*

c) Calculer $\int\limits_0^1 x^k dx$ *et utiliser ce calcul pour calculer S*

Exercice 76. *(⋆) Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n!}{n^n})^{\frac{1}{n}}$

Exercice 77. *Etudier la convergence de* $\sum \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$

Exercice 78. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de termes positifs tels que* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent.*
Montrer que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ *et* $\sum Max(u_n, v_n)$ *convergent.*

Exercice 79. *(⋆)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante tel que* $\sum u_n$ *soit convergente. Montrer que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$

Exercice 80. *(⋆) Déterminer un équivalent de* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 81. *(⋆) Déterminer un équivalent de* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ *pour* $\alpha \in]0,1[$

Exercice 82. *(⋆) Déterminer un équivalent de* $S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ *pour* $\alpha \in]1,+\infty[$

Exercice 83. *(⋆)*
Déterminer un équivalent de $S_n = ln(n!)$

Exercice 84. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels positifs.*
Montrer que : $\sum u_n$ *est convergente* $\Rightarrow \sum u_n^2$ *est convergente*

Exercice 85. *(⋆)*
A) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites vérifiant :* $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$
Montrer que : $\sum v_n$ *convergente* $\Rightarrow \sum u_n$ *convergente et que* $\sum u_n$ *divergente* $\Rightarrow \sum v_n$ *divergente.*
B) On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$
Montrer que : $a < 1 \Rightarrow \sum u_n$ *convergente et que* $a > 1 \Rightarrow \sum u_n$ *divergente*
Montrer que l'on ne peut pas conclure dans le cas $a = 1$.

Exercice 86. *(⋆⋆)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels positifs telle que* $\sum u_n$ *est convergente.*
On chercher à déterminer la nature de $\sum (u_n)^{1-\frac{1}{n}}$
a) Etudier le cas $u_n = \frac{1}{n^2}$
b) Etudier le cas général en comparant u_n *à* $\frac{1}{n^2}$